FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2016/17
Prova in itinere n.1
25 novembre 2016

Traccia della soluzione

ATTENZIONE!
I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo:

$$\dot{x}_1(t) = \alpha\, x_1(t)x_2(t) - 3x_1(t) + x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + \beta\, x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

Inizialmente si supponga $\alpha = 0$.

1.1) Discutere per quali valori reali del parametro β il sistema risulta asintoticamente stabile.

1.2) Dire se esistono valori reali del parametro β per cui il guadagno statico μ_s non è ben definito.

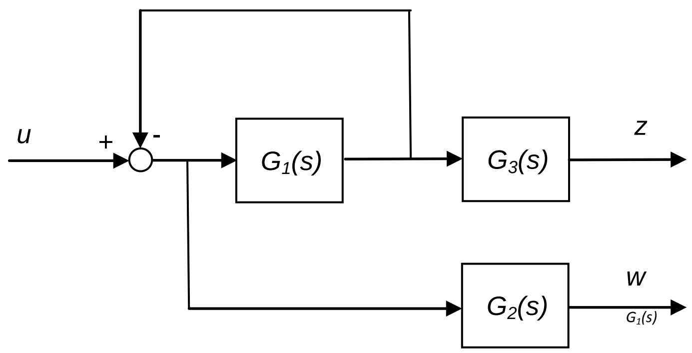
1.3) Ponendo $\beta = -1$, calcolare poli e zeri della funzione di trasferimento del sistema.

1.4) Si supponga ora $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Determinare tutti i possibili stati di equilibrio del sistema associati a $\bar{u} = 0$.

1.5) Ricavare le equazioni del sistema linearizzato nell'intorno dello stato di equilibrio non nullo.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



2.1) Calcolare l'espressione delle due funzioni di trasferimento $G_{zu}(s)$ e $G_{wu}(s)$ tra l'ingresso *u* e le due uscite *z* e *w*.

2.2) Supponendo $G_1(s) = \frac{20}{s}$, $G_2(s) = \frac{2}{s+1}$, $G_3(s) = \frac{-10}{s+5}$, valutare la stabilità del sistema complessivo.

2.3) Calcolare la risposta dell'uscita $z(t), t \geq 0$, all'ingresso $u(t) = 4\text{sca}(t)$.

2.4) Sempre con $u(t) = 4\text{sca}(t)$, calcolare i valori asintotici $z(\infty)$ e $w(\infty)$.

2.5) Dire se, rispetto all'ingresso e alle uscite considerate, il sistema è strettamente proprio oppure no, spiegando come questo si rifletta nelle risposte delle uscite a uno scalino dell'ingresso.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\ y_k &= Hx_k \end{aligned} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1) Giudicare la stabilità del sistema.

3.2) Dire, motivando la risposta, se il sistema può stare in equilibrio con $\bar{y} = 6$.

3.3) Spiegare cosa rappresenta in generale il movimento libero del sistema.

3.4) Ponendo $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare il movimento libero dell'uscita nei primi istanti, fino all'istante $k = 4$.

3.5) Verificare che il sistema non può essere stabilizzato mediante la retroazione $u_k = 3y_k$

ESERCIZIO 4

Si considerino le seguenti istruzioni Matlab e si dica per ciascuna qual è il valore della variabile in uscita.

```
» x = eig([2  -2 ; 4  -4]);

» y = tf([3], [4  2]);

» w = trace([0  5 ; 1  2]);

» z = roots([1  6  8]);
```

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Con $\alpha = 0$, il sistema è lineare ed è descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & \beta \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è dato da $\varphi(\lambda) = \det(I - A) = \lambda^2 + (3-\beta)\lambda - 2 - 3\beta$. Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia asintoticamente stabile è che i coefficienti di $\varphi(\lambda)$ siano diversi da zero e concordi in segno. Ciò avviene per $\beta < -2/3$.

1.2) Il guadagno statico non è ben definito quando la matrice A risulta non invertibile, cioè quando $\det(A) = -2 - 3\beta = 0$, ovvero per $\beta = -2/3$.

1.3) Si ricava

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{s^2 + 4s + 1}\begin{bmatrix} s-\beta & 1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-(s+2)}{s^2 + 4s + 1}$$

Quindi i poli valgono $s = -2 \pm \sqrt{3}$ e lo zero vale $s = -2$.

1.4) Con $\alpha = 1$, $\beta = -1$, il sistema diventa non lineare. Per trovare gli stati di equilibrio associati a $\bar{u} = 0$, occorre risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(t)x_2(t) - 3x_1(t) + x_2(t) \\ 0 &= 2x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

Tale sistema ammette 2 soluzioni date da $\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.5) Le equazioni del sistema linearizzato intorno allo stato di equilibrio $\bar{x}_B$ sono:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_1(t) &= -2\delta x_1(t) + \frac{3}{2}\delta x_2(t) \\ \delta\dot{x}_2(t) &= 2\delta x_1(t) - \delta x_2(t) + \delta u(t) \\ \delta y(t) &= \delta x_1(t) - \delta x_2(t) \end{aligned}$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) Direttamente dallo schema a blocchi risulta:

$$G_{zu}(s) = \frac{G_1(s)G_3(s)}{1+G_1(s)} \quad , \quad G_{wu}(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)}$$

2.2) Sostituendo le espressioni delle $G_i(s),\ i = 1,2,3$, nelle precedenti formule si ottiene:

$$G_{zu}(s) = \frac{-200}{(s+20)(s+5)} \quad , \quad G_{wu}(s) = \frac{2s}{(s+20)(s+1)}$$

Gli autovalori del sistema complessivo coincidono con l'unione di tutti i poli delle due funzioni di trasferimento, quindi valgono -1, -5 e -20. Essendo tutti negativi, il sistema è asintoticamente stabile.

2.3) Bisogna calcolare con lo sviluppo di Heaviside la antitrasformata di $Z(s) = G_{zu}(s)\frac{4}{s}$. Risulta:

$$Z(s) = \frac{-800}{s(s+20)(s+5)} = \frac{-8}{s} - \frac{8/3}{s+20} + \frac{32/3}{s+5}$$

e quindi $z(t) = -8 - \frac{8}{3}e^{-20t} + \frac{32}{3}e^{-5t}\ ,\ t \geq 0$.

2.4) Dal calcolo precedente si vede che il valore asintotico di $z(t)$ è $z(\infty) = -8$. Allo stesso risultato si perviene mediante l'applicazione a $Z(s)$ del teorema del valore finale.
Per quanto riguarda $w(\infty)$, si può applicare lo stesso teorema a

$$W(s) = G_{wu}(s)\frac{4}{s} = \frac{8}{(s+20)(s+1)}$$

In tal modo si trova $w(\infty) = \lim_{s\to 0} sW(s) = 0$.

2.5) Entrambe le funzioni di trasferimento $G_{zu}(s)$ e $G_{wu}(s)$ sono strettamente proprie, perché per ciascuna di esse il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore. Quindi, rispetto all'ingresso e alle uscite considerate, l'intero sistema è strettamente proprio.
In un sistema strettamente proprio, l'applicazione di uno scalino in ingresso non provoca una discontinuità delle uscite all'istante iniziale.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Poiché la matrice F è triangolare, gli elementi sulla diagonale (2 e -2) sono i suoi autovalori. Siccome entrambi hanno modulo maggiore di 1, il sistema è instabile.

3.2) Imponendo le condizioni di equilibrio per un generico ingresso costante $\bar{u}$ si trova:

$$x_1 = 2x_1 + \bar{u}$$
$$x_2 = x_1 - 2x_2 + \bar{u}$$
$$6 = \bar{y} = x_2$$

ovvero deve essere

$$x_1 = -\bar{u}$$
$$x_1 = 18 - \bar{u}$$

che è palesemente impossibile. Si conclude che il sistema non può stare in equilibrio con $\bar{y} = 6$.
D'altra parte, il guadagno statico vale $\mu_s = H(I-F)^{-1}G = 0$. Perciò all'equilibrio l'uscita è nulla per qualunque valore costante dell'ingresso.

3.3) Il movimento libero rappresenta la componente del movimento dovuta allo stato iniziale x_0. Il movimento libero dello stato è dato da $x_{l,k} = F^k x_0$. Quello dell'uscita è dato da $y_{l,k} = HF^k x_0$.

3.4) Iterando le equazioni del sistema, considerando nullo l'ingresso, si ottiene:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x_{l,1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_{l,2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad x_{l,3} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad x_{l,4} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \ldots$$

Quindi il movimento libero dell'uscita è:

$$y_{l,0} = 0 \quad , \quad y_{l,1} = 1 \quad , \quad y_{l,2} = 0 \quad , \quad y_{l,3} = 4 \quad , \quad y_{l,4} = 0 \quad , \quad \ldots$$

Allo stesso risultato si arriva usando la formula $y_{l,k} = HF^k x_0$.

3.5) Applicando la retroazione si ottiene il sistema dinamico:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (F + 3GH)x_k \\ y_k &= Hx_k \end{aligned} \quad , \quad \hat{F} = F + 3GH = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La stabilità del sistema retroazionato dipende quindi dagli autovalori della matrice $\hat{F}$. Anche senza calcolare esplicitamente tali autovalori si vede che la traccia di $\hat{F}$ è maggiore di $n = 2$, violando una delle condizioni necessarie per l'asintotica stabilità. Quindi il sistema retroazionato non può essere asintoticamente stabile.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

```
» x = eig([2  -2 ; 4  -4]);
```

Questa istruzione calcola gli autovalori della matrice $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, che sono 0 e -2.

```
» y = tf([3], [4  2]);
```

Questa istruzione genera la funzione di trasferimento $\dfrac{3}{4s+2}$.

```
» w = trace([0  5 ; 1  2]);
```

Questa istruzione calcola la traccia della matrice $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, che vale 2.

```
» z = roots([1  6  8]);
```

Questa istruzione calcola le radici del polinomio $s^2 + 6s + 8$, che sono -2 e -4.