

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2002/03

Prova in itinere n.2

31 gennaio 2003

ATTENZIONE!

I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro. In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema con ingresso u e uscita y descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{240(\mathbf{a}s + 1)}{s^2 + 4.8s + 36 + \mathbf{a}}$$

1.1) Supponendo inizialmente $\mathbf{a} = 0$, valutare anche approssimativamente i seguenti parametri della risposta del sistema ad uno scalino unitario: (a) *tempo di assestamento*; (b) *massima sovravelongazione relativa*; (c) *periodo delle eventuali oscillazioni*; (d) *valore dell'uscita a transitorio esaurito*.

1.2) Assumendo ora che la costante positiva \mathbf{a} aumenti, discutere se variano e come variano i parametri (a)-(d) della risposta allo scalino calcolati in precedenza.

1.3) Si consideri infine il sistema di Fig. 1, dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento studiata al punto 1.1 (con $\mathbf{a} = 0$), mentre $H(s) = \frac{0.1}{1 + s\mathbf{t}}$.

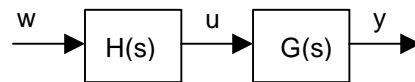


Fig. 1

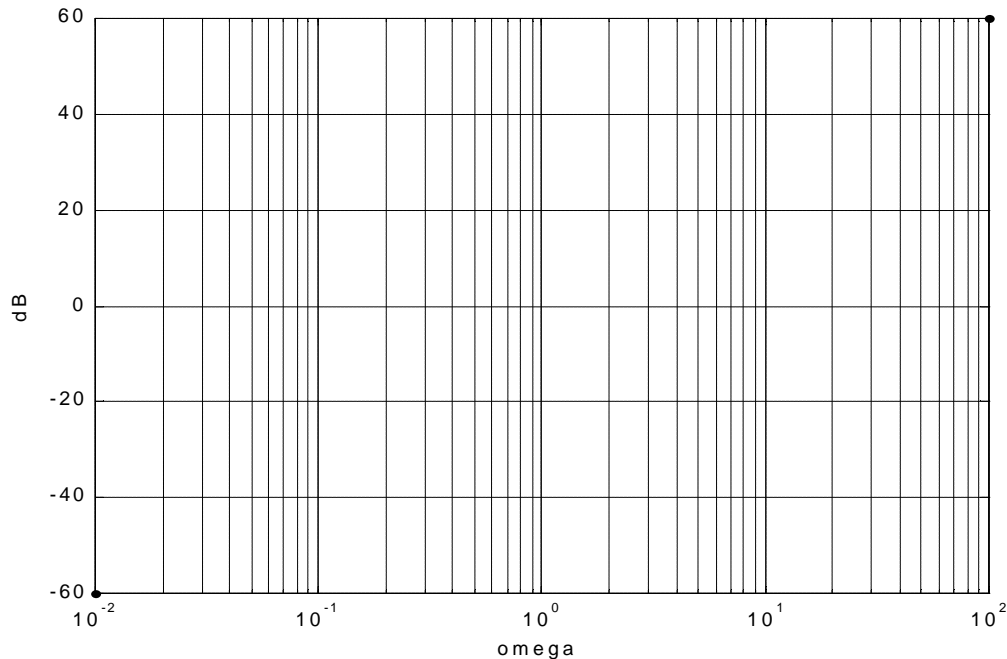
Dire in cosa differisce la risposta allo scalino del sistema di Fig. 1 rispetto a quella studiata al punto 1.1 nei seguenti quattro casi: (A) $\mathbf{t} = 0.05$; (B) $\mathbf{t} = 5$; (C) $\mathbf{t} = -5$; (D) $\mathbf{t} = 0$.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100(1+s)(1+0.1s)}{(1+10s)(1+0.2s)}$$

2.1) Tracciare il corrispondente diagramma di Bode asintotico del modulo.



2.2) Sulla base di tale diagramma dire se il sistema si comporta come un passa-basso o come un passa-alto e valutarne la banda passante. Spiegare poi il significato concettuale di *banda passante*.

2.3) Sempre dal diagramma, valutare l'amplificazione (o l'attenuazione) che il sistema applica all'ingresso $u(t) = \text{sen}(0.2t)$.

2.4) Calcolare il valore della fase $\angle G(j\omega)$ in corrispondenza di $\omega = 0.2$ e spiegare cosa rappresenta alla luce del teorema della risposta in frequenza. Indicare poi la posizione nel piano complesso di $G(j0.2)$.

ESERCIZIO 3 (Milano)

Con riferimento all'esempio di sistema di controllo per un satellite artificiale discusso nell'ultima esercitazione di laboratorio, illustrare brevemente il problema considerato, mettendo in evidenza qual è la variabile controllata, quale la variabile di controllo e quali i principali disturbi di cui si è tenuto conto.

ESERCIZIO 3 (Como)

Si dica qual è la funzione di trasferimento di un sistema a tempo continuo descritto dalla relazione ingresso-uscita

$$y(t) = u(t-h)$$

dove h è una costante positiva. Fare poi un esempio di fenomeno fisico reale ben descritto da tale relazione.

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo di Fig. 2

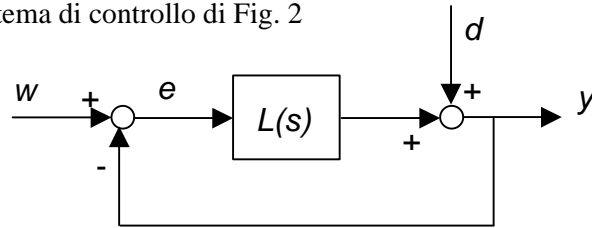


Fig. 2

la cui funzione d'anello $L(s)$ ha i diagrammi di Bode riportati in Fig. 3.

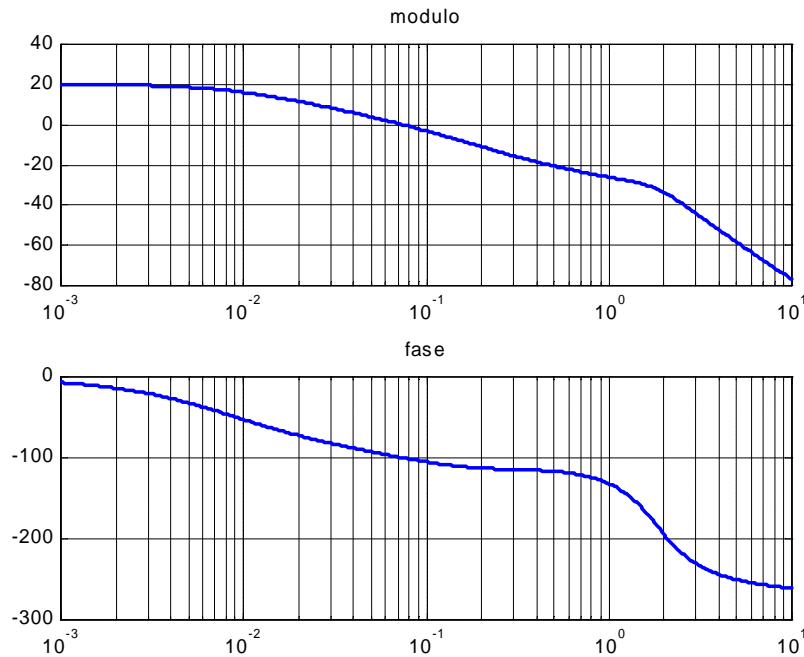


Fig. 3

4.1) Sulla base di tali diagrammi valutare, anche approssimativamente, i seguenti parametri:

(a) pulsazione ω_p ; (b) margine di guadagno k_m ; (c) pulsazione critica ω_c ; (d) margine di fase \hat{j}_m .

4.2) Dire se per affermare l'asintotica stabilità del sistema di Fig. 2 i dati disponibili sono sufficienti. In caso contrario, aggiungere le ipotesi che mancano.

4.3) Valutare la capacità del sistema di controllo di attenuare l'effetto di un generico disturbo d .

4.4) Determinare, anche approssimativamente, il valore a transitorio esaurito della variabile y nelle due seguenti situazioni: (a) $w(t) = d(t) = sca(t)$; (b) $w(t) = sca(t)$, $d(t) = ram(t)$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Il sistema ha guadagno $m = G(0) = 20/3$. I due poli complessi coniugati hanno pulsazione naturale $w_n = 6$ e smorzamento $\alpha = 0.4$. I parametri caratteristici della risposta allo scalino sono allora:

(a) tempo di assestamento $t_a \cong \frac{5}{\alpha w_n} \cong 2.08$

(b) massima sovraelongazione relativa: $\Delta = \exp\left(-\frac{\alpha p}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right) \cong 0.25 = 25\%$

(c) periodo delle oscillazioni: $T = \frac{2p}{w_n \sqrt{1-\alpha^2}} \cong 1.14$

(d) valore dell'uscita a transitorio esaurito: $y(\infty) = m = 20/3$

1.2) All'aumentare della costante a

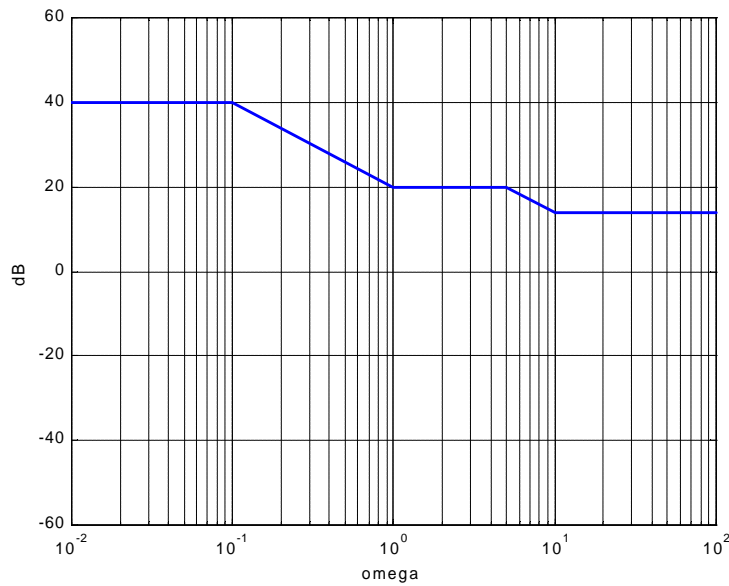
- la pulsazione naturale aumenta e lo smorzamento diminuisce;
- il tempo di assestamento rimane invariato, visto che la parte reale dei poli non cambia;
- la massima sovraelongazione aumenta, sia perché diminuisce lo smorzamento, ma anche perché c'è l'effetto aggiuntivo di uno zero nel semipiano sinistro;
- il periodo delle oscillazioni diminuisce;
- il valore a transitorio esaurito diminuisce.

1.3) La risposta allo scalino nei vari casi si modifica così:

- (A) il valore di regime si riduce di un fattore 10, ma la forma della risposta praticamente non cambia perché il polo aggiuntivo ha una costante di tempo molto piccola;
- (B) oltre alla riduzione del valore di regime, la risposta avrà un andamento esponenziale dominato dalla costante di tempo $t = 5$; il tempo di assestamento diventa $t_a \cong 25$;
- (C) il sistema è instabile e la risposta allo scalino contiene un'esponenziale divergente;
- (D) rispetto ai parametri del punto 1.1 cambia solo il guadagno (e quindi il valore di regime).

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1)



2.2) Il sistema si comporta come un filtro passa-basso con banda passante $B \cong [0, 0.1]$. La banda passante di un passa-basso è l'intervallo di pulsazioni in cui l'amplificazione è circa costante e uguale al guadagno del sistema. E' quindi l'intervallo di pulsazioni in cui non c'è apprezzabile "distorsione di ampiezza", a parte il fattore di amplificazione dato dal guadagno statico.

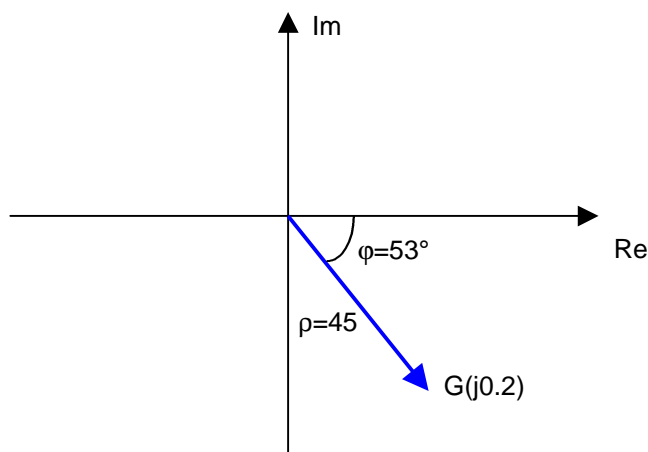
2.3) Dal diagramma risulta $|G(j0.2)| \cong 33dB$. Quindi l'ingresso viene amplificato di un valore circa pari a $10^{33/20} \cong 45$.

2.4) In corrispondenza di $w = 0.2$ la fase vale:

$$\arg G(j0.2) = \arctg(0.2) + \arctg(0.02) - \arctg(2) - \arctg(0.04) \cong -53^\circ \cong -0.93 \text{ rad}$$

Questo valore rappresenta lo sfasamento angolare che subisce una sinusoide in ingresso con pulsazione $w = 0.2$.

Avendo calcolato $|G(j0.2)| \cong 45$ e $\arg G(j0.2) \cong -53^\circ$, la posizione di $G(j0.2)$ nel piano complesso è approssimativamente quella indicata in figura.



SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3 (Milano)

L'esempio discusso nell'esercitazione di laboratorio riguarda il controllo dello "spin", cioè della rotazione intorno al proprio asse, di un satellite artificiale.

La variabile controllata è la velocità di rotazione.

La variabile di controllo è la coppia applicata da opportuni attuatori.

I principali disturbi sono i disturbi di coppia dovuti a fenomeni esterni (resistenza aerodinamica, radiazioni solari, ecc.) e i disturbi agenti sul trasduttore di velocità (si è ipotizzata una polarizzazione sistematica sulla misura della velocità).

(Per maggiori dettagli si veda il materiale disponibile sul sito web del corso.)

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3 (Como)

La relazione ingresso-uscita rappresenta un ritardo di tempo, la cui funzione di trasferimento è

$$G(s) = e^{-hs}$$

Tra i possibili fenomeni descrivibili in questa maniera si possono citare il ritardo di trasmissione di un segnale su un canale radio, il ritardo di elaborazione di un dispositivo, il ritardo con cui una variazione di temperatura all'imbocco di una condotta percorsa da un fluido si propaga all'estremità opposta, ecc.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

4.1) Dai diagrammi si ricava

$$\mathbf{w}_p \cong 1.8 \quad , \quad k_m \cong 30dB \cong 31 \quad , \quad \mathbf{w}_c \cong 0.07 \quad , \quad \mathbf{j}_m \cong 80^\circ$$

4.2) Per poter applicare il criterio di Bode (oltre ad avere una pulsazione critica univocamente individuata) è necessario che sia $P=0$, cioè che la funzione d'anello non possieda poli con parte reale positiva (peraltro tale ipotesi appare plausibile visto che il diagramma della fase è monotono decrescente).

Aggiungendo questa ipotesi si può affermare che il sistema è asintoticamente stabile dato che sia il guadagno d'anello che il margine di fase sono positivi (il segno del guadagno d'anello si deduce dal valore nullo della fase per \mathbf{w} tendente a zero).

4.3) Nei confronti del disturbo d il sistema di controllo si comporta come un filtro passa-alto, con banda passante $B_S \cong [\mathbf{w}_c, \infty) \cong [0.07, \infty)$. Risultano pertanto attenuate solo le componenti "lente" del disturbo, cioè quelle con pulsazioni inferiori a $\mathbf{w}_c \cong 0.07$.

4.4) La fdt tra w e y è la funzione di sensitività complementare $F(s) = L(s)/(1+L(s))$, mentre la fdt tra d e y è la funzione di sensitività $S(s) = 1/(1+L(s))$. Il valore a transitorio esaurito di y si ottiene dal principio di sovrapposizione degli effetti e dal teorema del valore finale, osservando dai diagrammi di Bode che la funzione d'anello ha tipo $g=0$ e guadagno $\mathbf{m}=10$. Quindi nei due casi si ricava:

$$(a) \quad y(\infty) = \frac{\mathbf{m}}{1+\mathbf{m}} + \frac{1}{1+\mathbf{m}} = \frac{10}{11} + \frac{1}{11} = 1$$

$$(b) \quad y(\infty) = \frac{\mathbf{m}}{1+\mathbf{m}} + \infty = \frac{10}{11} + \infty = \infty$$