FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2003/04
Prova in itinere n.2
26 gennaio 2004

ATTENZIONE!
I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro.
In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per una sola tipologia di compito.

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema con ingresso *u* e uscita *y* descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{32}{(s+0.1)(s+8)}$$

1.1) Senza calcolarla esplicitamente, valutare approssimativamente le principali caratteristiche della risposta del sistema a uno scalino unitario. In particolare, si determinino il valore di regime dell'uscita e il tempo di assestamento.

1.2) Ricavare un'approssimazione a poli dominanti della funzione $G(s)$, spiegando poi se tale approssimazione può essere utilizzata per calcolare in modo accurato la risposta del sistema all'ingresso sinusoidale $u(t) = \mathrm{sen}(20t)$.

1.3) Dire come cambierebbe la risposta allo scalino se la funzione di trasferimento fosse $G(s) = \dfrac{-32}{(s+0.1)(s+8)}$

1.4) Dire come cambierebbe qualitativamente la risposta allo scalino se la funzione di trasferimento fosse $G(s) = \dfrac{32(1+40s)}{(s+0.1)(s+8)}$

1.5) Dire come cambierebbe la risposta allo scalino per il sistema descritto in Fig. 1, dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento indicata all'inizio dell'esercizio.

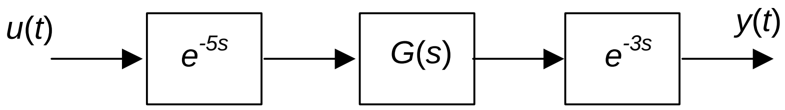


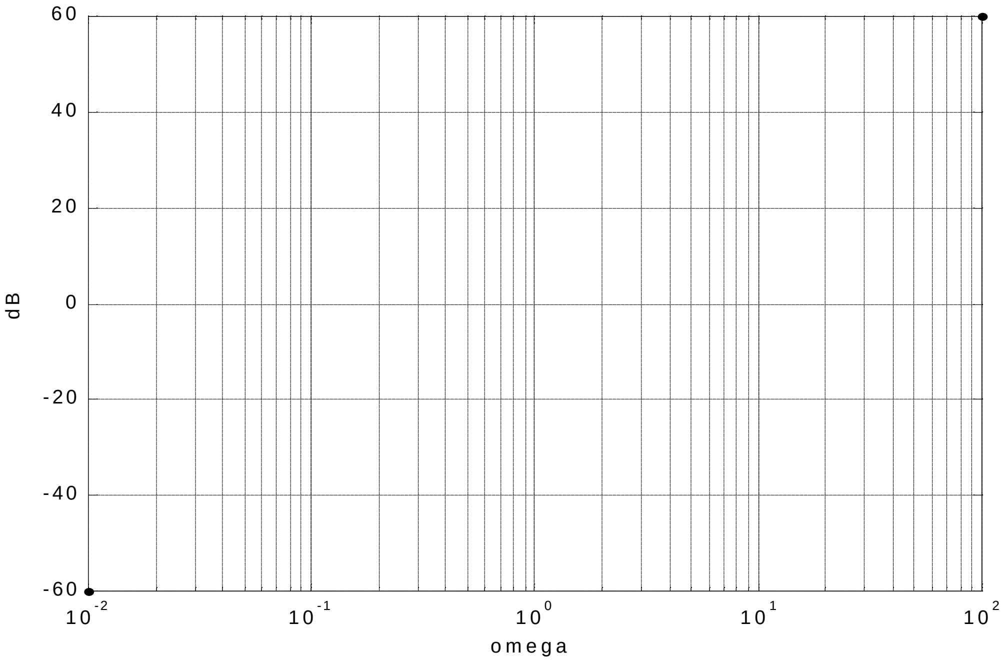
Fig. 1

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{40(1+0.1s)}{(1+10s)(1+2s)}$$

2.1) Tracciare il corrispondente diagramma di Bode asintotico del modulo.



2.2) Sulla base di tale diagramma, valutare la diversa amplificazione che il sistema applica all'ingresso $u(t) = sen(0.03t)$ oppure all'ingresso $u(t) = sen(40t)$.

2.3) Calcolare il valore della fase $\angle G(jw)$ in corrispondenza di $w = 40$.

2.4) Supponendo che lo spettro di ampiezza $C_u(w)$ dell'ingresso *u* sia una funzione costante nell'intervallo $1 < w < 5$ e nulla altrove, dire quale forma si prevede per lo spettro di ampiezza $C_y(w)$ dell'uscita.

2.5) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare di $G(jw)$.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo di Fig. 2

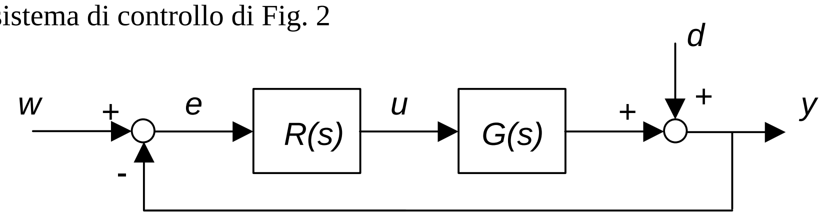
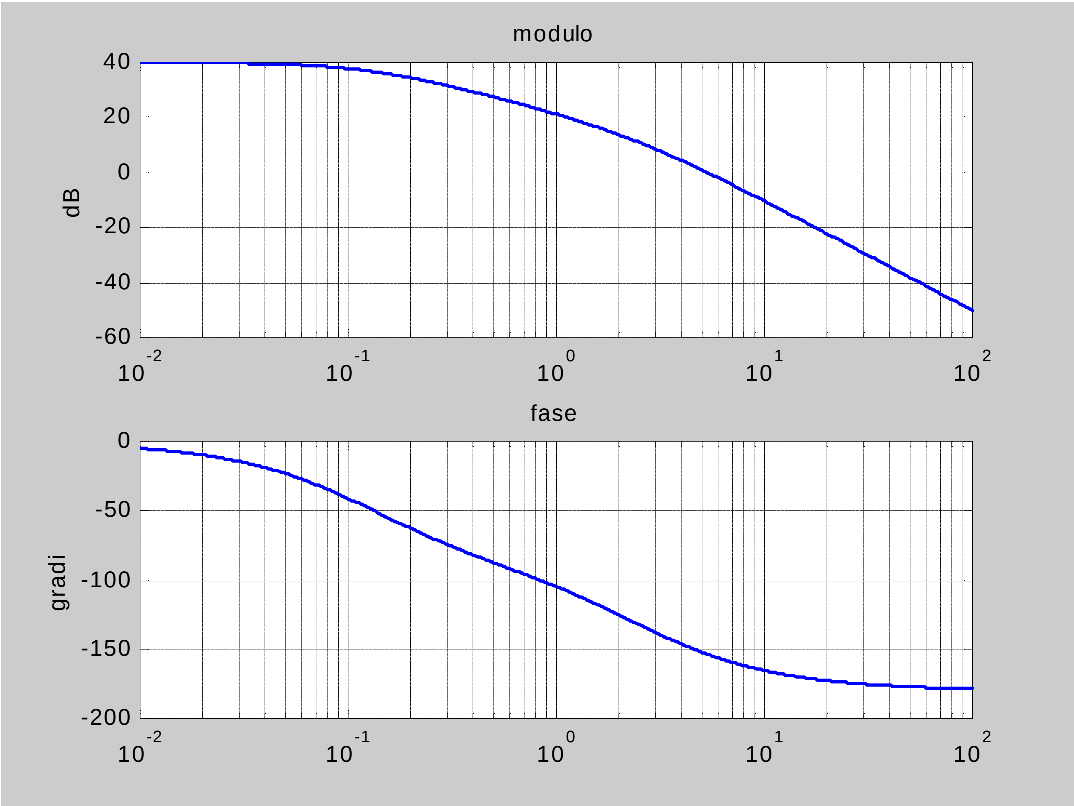


Fig. 2

dove $G(s)$ è una funzione di trasferimento asintoticamente stabile, con i seguenti diagrammi di Bode.



3.1) Ponendo $R(s)=1$, applicare il criterio di Bode per verificare la stabilità del sistema.

3.2) Sempre con $R(s)=1$, valutare qual è il massimo ritardo che il sistema potrebbe tollerare prima di diventare instabile.

3.3) Discutere come cambierebbero le prestazioni dinamiche del sistema di controllo se si ponesse $R(s)=10$

3.4) Valutare l'effetto a transitorio esaurito sull'uscita y di un disturbo $d(t)=15sca(t)$ con i due diversi regolatori $R(s)=1$ e $R(s)=10$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Poiché il sistema ha guadagno $m = G(0) = 40$ e due poli reali in $s = -0.1$ e $s = -8$, la risposta allo scalino converge al valore di regime $y(\infty) = m = 40$ senza presentare oscillazioni, né sovraelongazioni. Il tempo di assestamento si può valutare come $t_a \cong 5 \cdot 10 = 50$, in base alla costante di tempo dominante.

1.2) L'approssimazione a poli dominanti è $G_a(s) = \dfrac{40}{1+10s}$. Essa non è adatta per calcolare in modo accurato la risposta alla sinusoide $u(t) = \mathrm{sen}(20t)$, in quanto si tratta di un'approssimazione "a bassa frequenza" che trascura il polo in $s = -8$, mentre la pulsazione dell'ingresso è a pulsazione ancora più elevata ($w = 20$). Viene quindi fortemente sottostimata l'attenuazione che subisce tale ingresso.

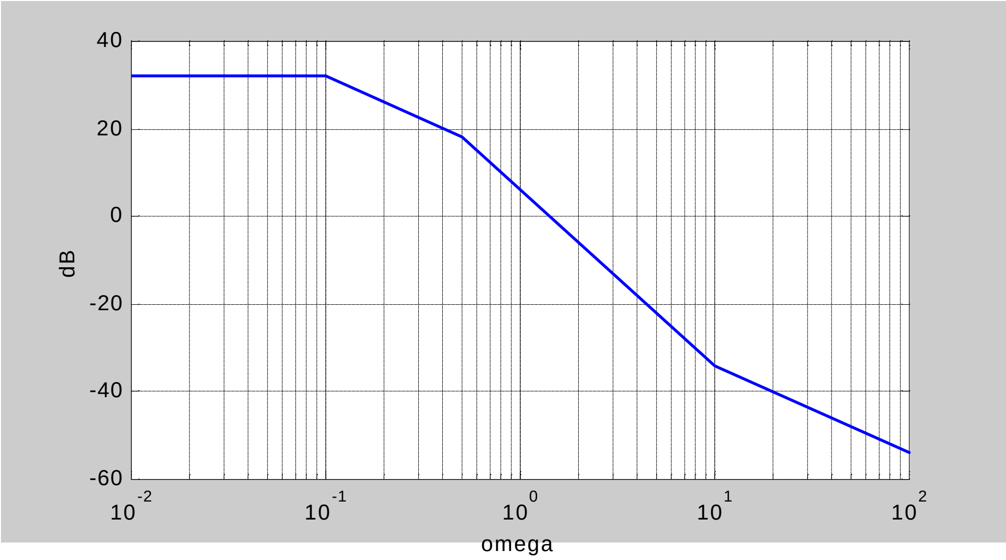
1.3) Cambia solo il segno del guadagno. Quindi la risposta allo scalino si ottiene per ribaltamento rispetto all'asse dei tempi.

1.4) La presenza di uno zero in $s = -1/40$, a distanza dall'origine inferiore a quella dei poli, produce sicuramente una sovraelongazione consistente. Il valore di regime e la stima del tempo di assestamento rimangono invece invariati.

1.5) La risposta è identica a quella del punto 1.1, ma traslata nel tempo di 8 unità.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1)

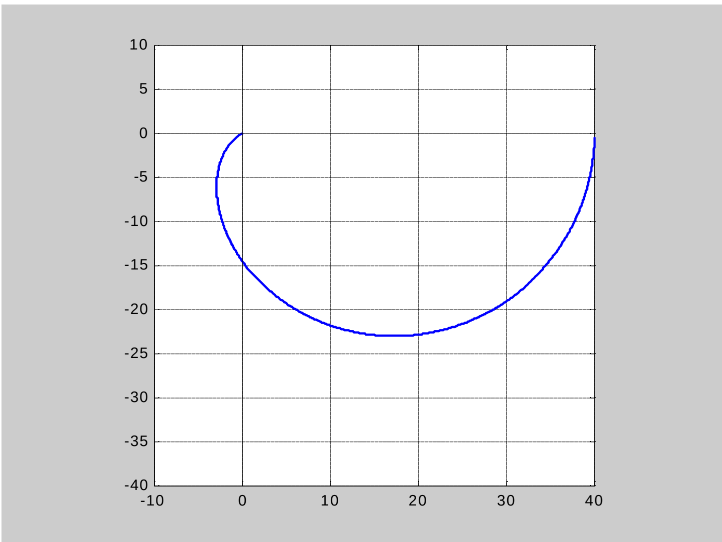


2.2) L'amplificazione in $w = 0.03$ è circa pari a 32 dB, che corrisponde a un fattore circa 40
L'amplificazione in $w = 40$ è circa pari a –46 dB, che corrisponde a un fattore circa 0.005

2.3) Risulta $\angle G(j40) = arctg(4) - arctg(400) - arctg(80) \cong -103°$

2.4) Secondo la teoria, $C_y(w) = |G(jw)|C_u(w)$. Quindi, innanzitutto, lo spettro dell'uscita è nullo per $w < 1$ e $w > 5$. Poi, visto che nell'intervallo tra 1 e 5 il diagramma di Bode del modulo decresce, lo spettro dell'uscita in quell'intervallo presenterà un andamento decrescente (lineare se si ragiona in decibel, esponenziale altrimenti).

2.5) Il diagramma polare ha il seguente aspetto:



Si noti che il diagramma termina nell'origine con pendenza verticale, anche se dal disegno non appare.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Prima di tutto, il criterio di Bode è applicabile perché $P = 0$ ed esiste un solo attraversamento dell'asse a 0 dB.

Il guadagno d'anello è positivo (perchè la fase parte da 0°).
La pulsazione critica vale $\omega_c \cong 5$, e in corrispondenza la fase critica è $\varphi_c \cong -150°$. Quindi anche il margine di fase è positivo ($\varphi_m \cong 30°$) e pertanto le condizioni del criterio di Bode sono entrambe soddisfatte. Il sistema di controllo è dunque asintoticamente stabile.

3.2) Il massimo ritardo tollerabile è $\tau = \dfrac{\varphi_m}{\omega_c} \dfrac{\pi}{180°} \cong 0.1$

3.3) In tal caso, il diagramma del modulo della funzione d'anello è quello di $G(s)$ traslato verso l'alto di 20 dB, mentre il diagramma della fase non cambia. Con questo regolatore si ottiene pertanto $\omega_c \cong 20$ e $\varphi_m \cong 10°$. Dal punto di vista delle prestazioni dinamiche, il sistema di controllo ha quindi una banda più ampia, ma è anche molto meno smorzato (pur rimanendo stabile).

3.4) Poiché in ogni caso la funzione d'anello ha tipo $g = 0$, il valore a transitorio esaurito vale

$$y(\infty) = \frac{15}{1+\mu}$$

dove μ rappresenta il guadagno d'anello. Dai diagrammi di Bode, il guadagno di $G(s)$ vale $\mu_G = 100$. Quindi, con il primo regolatore risulta $y(\infty) = 15/101$, mentre con il secondo $y(\infty) = 15/1001$.