

# **FONDAMENTI DI AUTOMATICA**

Anno Accademico 2005/06

Prova in itinere n.2

6 febbraio 2006

## **TRACCIA DELLA SOLUZIONE**

### **ATTENZIONE!**

I compiti utilizzati per la prova erano leggermente diversi tra di loro.  
In questo documento vengono presentati gli esercizi e le relative soluzioni per  
una sola tipologia di compito.

## ESERCIZIO 1

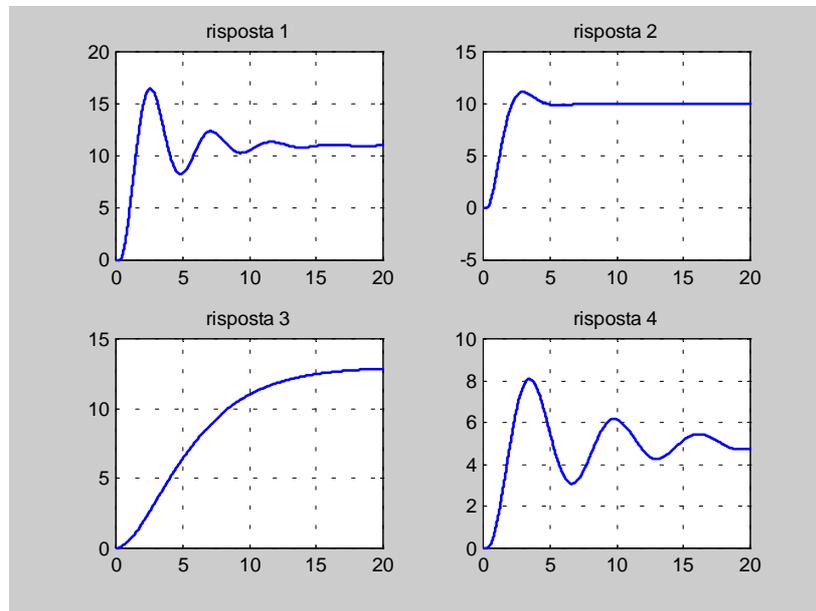
Si consideri il sistema dinamico, con ingresso  $u$  e uscita  $y$ , descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-s + 11}{(1 + 0.3s + 0.5s^2)(1 + 0.1s)^2}$$

1.1) Determinare un'approssimazione a poli dominanti  $G_a(s)$ .

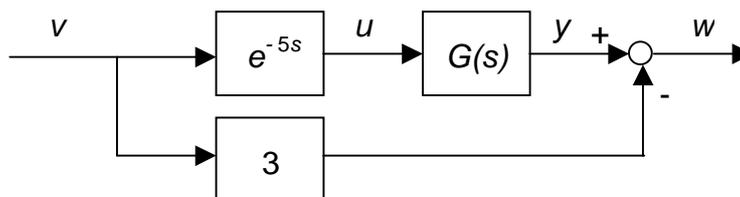
1.2) Dire quali differenze ci si aspetta tra la risposta allo scalino del sistema "vero", descritto da  $G(s)$ , e di quello approssimato, descritto da  $G_a(s)$ .

1.3) Spiegandone brevemente le ragioni, dire quale tra le risposte mostrate in figura può rappresentare la risposta allo scalino del sistema "vero"  $G(s)$ .



1.4) Valutare l'amplificazione che subisce (a transitorio esaurito) un ingresso  $u$  sinusoidale con periodo  $T = 2\pi$ .

1.5) Si consideri ora il sistema rappresentato dal seguente schema a blocchi:

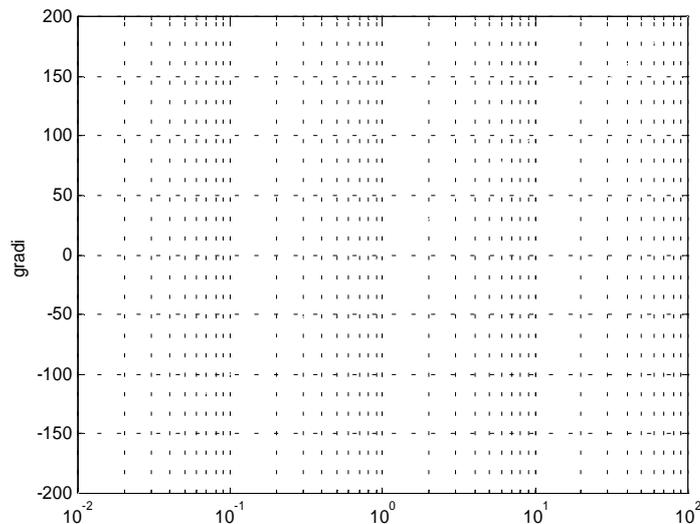
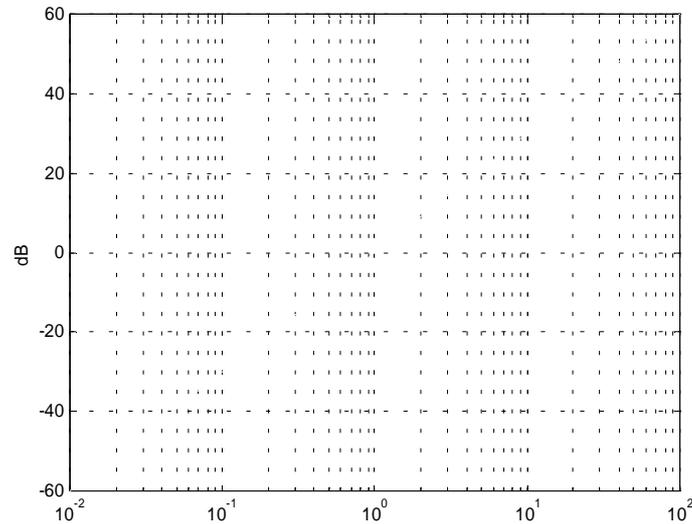


Dedurre qual è l'andamento nel tempo di  $w$  in risposta all'ingresso  $v(t) = \text{sca}(t)$ . In particolare, dopo quanto tempo la variabile  $w$  si può ritenere definitivamente assestata sul suo valore asintotico? E qual è questo valore asintotico?

## ESERCIZIO 2

2.1) Spiegare cosa rappresentano i *diagrammi di Bode* e il *diagramma polare* associati a una generica funzione di trasferimento  $L(s)$ .

2.2) Tracciare i *diagrammi di Bode* (approssimati) del modulo e della fase associati a  $L(s) = \frac{30(s+2)}{(s-2)}$ .

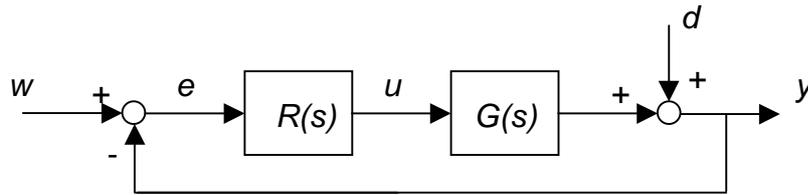


2.3) Tracciare l'andamento qualitativo del *diagramma polare* associato a  $L(s)$ .

2.4) Si supponga ora che la funzione di trasferimento  $L(s)$  finora considerata sia la funzione d'anello di un sistema retroazionato, con retroazione negativa. Dimostrare in almeno due modi diversi che tale sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

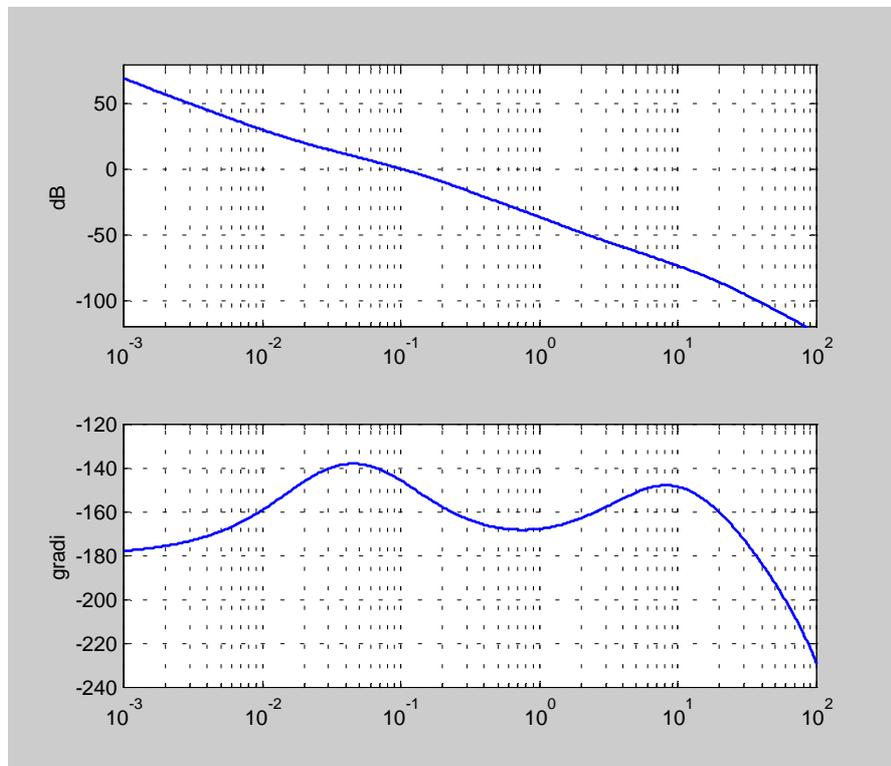
### ESERCIZIO 3

Si consideri il classico schema di sistema di controllo in anello chiuso mostrato in figura.



**3.1)** Spiegare che cos'è la *funzione di sensitività complementare* e perché essa ha in generale un comportamento da filtro passa-basso.

**3.2)** Si supponga ora che  $G(s)$  sia asintoticamente stabile, abbia guadagno positivo e i suoi diagrammi di Bode siano quelli in figura. In corrispondenza dei due diversi controllori  $R_1(s) = 1$  e  $R_2(s) = 10$ , verificare la stabilità del sistema di controllo e valutare la banda passante della funzione di sensitività complementare.



**3.3)** Ancora in corrispondenza dei due controllori  $R_1(s) = 1$  e  $R_2(s) = 10$ , e deducendo dai grafici il *tipo* della funzione di trasferimento  $G(s)$ , valutare la *precisione statica* del sistema di controllo in presenza di ingressi  $w$  e  $d$  a scalino.

**3.4)** Valutare il *margin di guadagno* che i due controllori riescono a garantire, e spiegare cosa rappresenta tale parametro in termini di robustezza.

**SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1**

**1.1)** L'approssimazione a poli dominanti è data dalla funzione di trasferimento

$$G_a(s) = \frac{11}{1 + 0.3s + 0.5s^2}$$

che possiede due poli complessi coniugati con  $\omega_n = \sqrt{2} \cong 1.4$  e  $\xi = \frac{0.3}{\sqrt{2}} \cong 0.21$ .

**1.2)** La risposta allo scalino del sistema “vero” presenta una leggera sottoelongazione, dovuta allo zero nel semipiano destro, e un transitorio di salita un po' più lento per via dei poli ad alta frequenza trascurati nell'approssimazione. Il valore di regime è identico e anche il tempo di assestamento e le caratteristiche delle oscillazioni sono quasi uguali. Infine, nella risposta approssimata la derivata seconda all'istante iniziale è positiva, contrariamente a quanto accade nella risposta “vera”.

**1.3)** La risposta corretta è la n. 1, come si deduce dal valore di regime (che deve essere uguale a 11), dal tempo di assestamento (che è circa  $t_a = \frac{5}{\xi\omega_n} \cong 16.6$ ) e dalle caratteristiche delle oscillazioni (che sono coerenti con i valori di  $\omega_n$  e  $\xi$  prima calcolati).

**1.4)** La pulsazione della sinusoidale in ingresso è  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ . Per il teorema della risposta in frequenza, l'amplificazione che subisce l'ingresso è uguale a  $|G(j1)| \cong 18$ .

**1.5)** L'andamento di  $w$  è identico a quello della risposta n.1 in figura, ma traslato di 3 unità verso il basso e ritardato di 5 unità di tempo. Pertanto il valore asintotico è  $w(\infty) = 11 - 3 = 8$  e viene raggiunto in pratica dopo  $t_a + 5 \cong 21.6$  unità di tempo.

## SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

**2.1)** I diagrammi di Bode servono a rappresentare separatamente il modulo e la fase associati alla risposta in frequenza  $L(j\omega)$ , per  $\omega \geq 0$ . Per convenzione, l'asse delle pulsazioni è in scala logaritmica, il modulo è espresso in decibel e la fase in gradi.

Il diagramma polare è invece la rappresentazione della risposta in frequenza nel piano complesso. E' costituito da una linea "punteggiata" nei valori della pulsazione  $\omega$  e orientata per valori di  $\omega$  crescenti.

**2.2)** Il diagramma del modulo è una retta costante con ordinata pari a  $20\log 30 \cong 30$  dB.

Il diagramma asintotico della fase parte da  $-180^\circ$  (per via del guadagno negativo) e sale di  $180^\circ$  (per i contributi dello zero e del polo instabile) in corrispondenza di  $\omega = 2$ , assestandosi quindi sul valore  $0^\circ$ .

**2.3)** Il diagramma polare è costituito da una semicirconferenza, percorsa in senso antiorario, che parte dal punto  $-30$  sull'asse reale e arriva al punto  $+30$  sempre sull'asse reale.

### 2.4)

**Procedimento 1.** Utilizzando il criterio di Nyquist, occorre verificare che il diagramma di Nyquist (costituito dal diagramma polare e dal suo simmetrico rispetto all'asse reale) faccia esattamente un giro antiorario intorno al punto  $-1$ . Infatti  $P = 1$ , poiché  $L(s)$  possiede un polo nel semipiano destro.

La verifica è immediata perché il diagramma polare è la circonferenza di raggio 30 e centro nell'origine, percorsa in senso antiorario.

**Procedimento 2.** Se si calcola il polinomio caratteristico del sistema retroazionato si ottiene

$$D(s) + N(s) = 31s + 58$$

la cui unica radice è negativa. Ciò conferma che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

### SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

**3.1)** Indicando con  $L(s) = R(s)G(s)$  la funzione di trasferimento d'anello, la funzione di sensitività complementare è definita come

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Tipicamente, la funzione  $|L(j\omega)|$  assume valori maggiori di 1 a bassa frequenza e minori di 1 ad alta frequenza e attraversa l'asse a 0 dB in corrispondenza della pulsazione critica  $\omega_c$ . Di conseguenza, il diagramma di Bode del modulo associato a  $F(j\omega)$  può essere approssimato da una semiretta a 0 dB per bassi valori di  $\omega$  (quelli inferiori alla pulsazione critica  $\omega_c$ ) e dal diagramma di  $|L(j\omega)|$  per valori di  $\omega$  elevati (superiori a  $\omega_c$ ), e assume quindi l'andamento di un filtro passa-basso, con banda passante che si estende da 0 fino a  $\omega_c$ .

**3.2)** Se si utilizza il controllore  $R_1(s)$ , quelli riportati in figura sono già i diagrammi di Bode della funzione d'anello. Da essi si deduce che  $\omega_c \cong 0.1$  e il margine di fase è  $\varphi_m \cong 35^\circ$ . Poiché, grazie anche alla asintotica stabilità di  $G(s)$ , il criterio di Bode è applicabile, si conclude che il sistema di controllo è asintoticamente stabile: infatti il margine di fase è positivo e il guadagno d'anello (come si deduce dal testo dell'esercizio) è anch'esso positivo. La banda passante di  $F(s)$  si può valutare come  $B_F \cong [0, \omega_c] = [0, 0.1]$ .

In corrispondenza del controllore  $R_2(s)$ , il diagramma del modulo della funzione d'anello si solleva di 20 dB, finendo per attraversare l'asse a 0 dB in corrispondenza di  $\omega_c \cong 0.4$ . Il relativo margine di fase è  $\varphi_m \cong 15^\circ > 0$ , e il sistema rimane comunque asintoticamente stabile. La banda passante di  $F(s)$  risulta aumentata perché stavolta  $B_F \cong [0, 0.4]$ . (In realtà si potrebbe notare che, con un margine di fase così basso, il diagramma di  $|F(j\omega)|$  presenta senz'altro un picco di risonanza e, a rigore, non ha più le caratteristiche di un vero filtro passa-basso.)

**3.3)** Dai diagrammi di Bode si deduce che  $G(s)$  è di tipo  $g = 2$ , cioè contiene 2 integratori. Ciò garantisce che l'errore a transitorio esaurito in presenza di ingressi a scalino sia nullo.

**3.4)** In corrispondenza di entrambi i controllori, il valore di  $\omega$  per cui la fase della funzione d'anello è uguale a  $-180^\circ$  è  $\omega_\pi \cong 35$  (si veda il diagramma della fase). In corrispondenza  $|G(j\omega)| \cong -100$  dB. Quindi il controllore  $R_1(s)$  garantisce un margine di guadagno  $k_m \cong 100$  dB, ovvero  $k_m \cong 10^5$ . Naturalmente, il controllore  $R_2(s)$  garantisce un margine di guadagno ridotto di un fattore 10, e cioè  $k_m \cong 10^4$ .

Il margine di guadagno rappresenta un fattore di sicurezza nei confronti di incertezze sul guadagno della funzione d'anello. Più il margine di guadagno è grande, maggiore è il grado di robustezza della stabilità.