ESERCIZIO 1

Si consideri un sistema dinamico del secondo ordine con:

- due poli in $-2 \pm j$
- nessuno zero
- guadagno statico $\mu = 4$

1.1) Scrivere l'espressione della corrispondente *funzione di trasferimento*.

1.2) Valutare il *tempo di assestamento* e il *valore di regime* della risposta del sistema a uno scalino unitario.

1.3) Supponendo ora che l'ingresso sia $u(t) = A\,\mathrm{sca}(t)$, determinare il massimo valore positivo di *A* per cui la risposta $y(t)$ rimane in modulo minore o uguale a 10 in ogni istante $t \geq 0$.

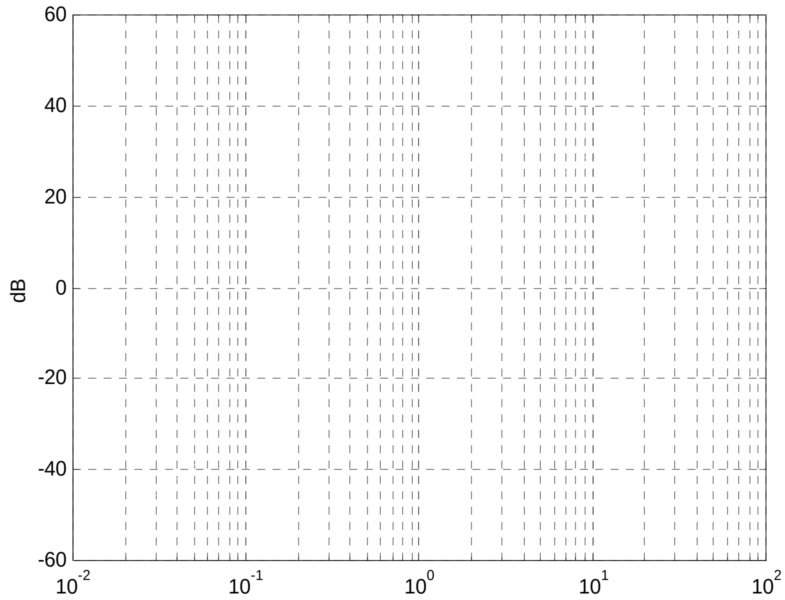
1.4) Si supponga ora che il sistema finora considerato sia *in serie* con un altro sistema avente funzione di trasferimento $H(s) = \dfrac{2}{1+0.1s}$. Valutare il tempo di assestamento e il valore di regime della risposta del sistema complessivo a uno scalino unitario.

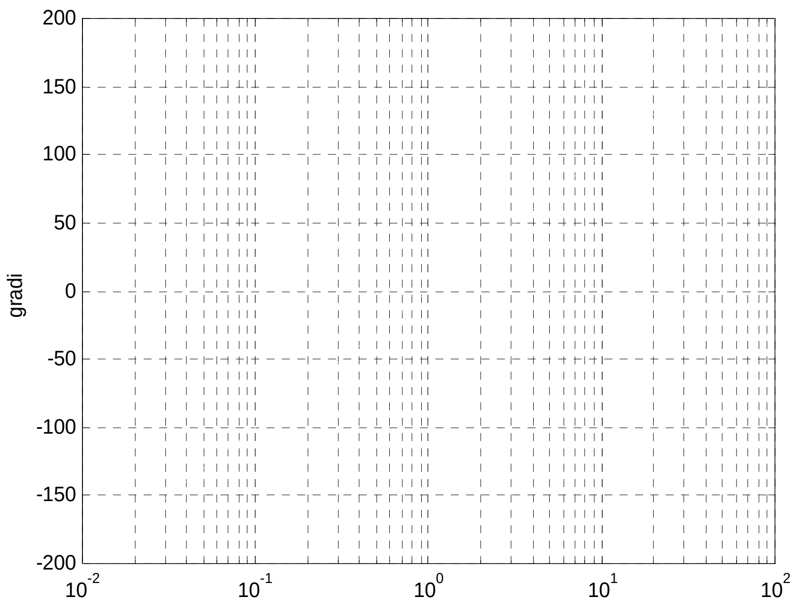
1.5) Ripetere il calcolo del punto precedente supponendo che il sistema $H(s)$ sia *in parallelo* con il sistema originario.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema con ingresso $u(t)$, uscita $y(t)$ e funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{100(1-0.1s)}{(1+30s)}$.

2.1) Tracciare i corrispondenti diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase.





2.2) Calcolare per via analitica i valori del modulo e della fase in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ e verificare che essi sono coerenti con i diagrammi tracciati in precedenza.

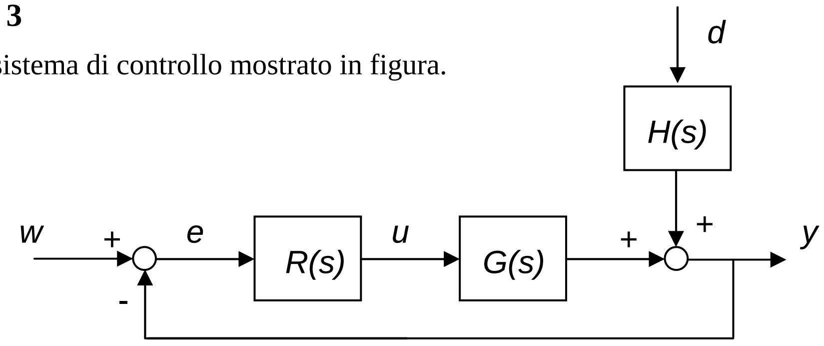
2.3) Spiegare perché il sistema in esame può essere classificato come un *filtro passa-basso*.

2.4) Determinare un'altra funzione di trasferimento, diversa da $G(s)$, che abbia lo stesso diagramma di Bode del modulo.

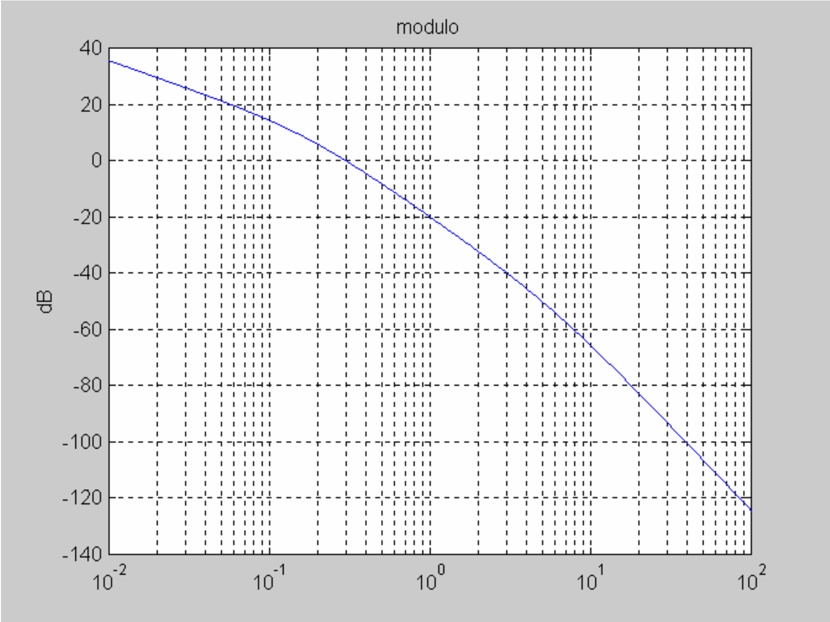
2.5) Determinare un'altra funzione di trasferimento, diversa da $G(s)$, che abbia lo stesso diagramma di Bode della fase.

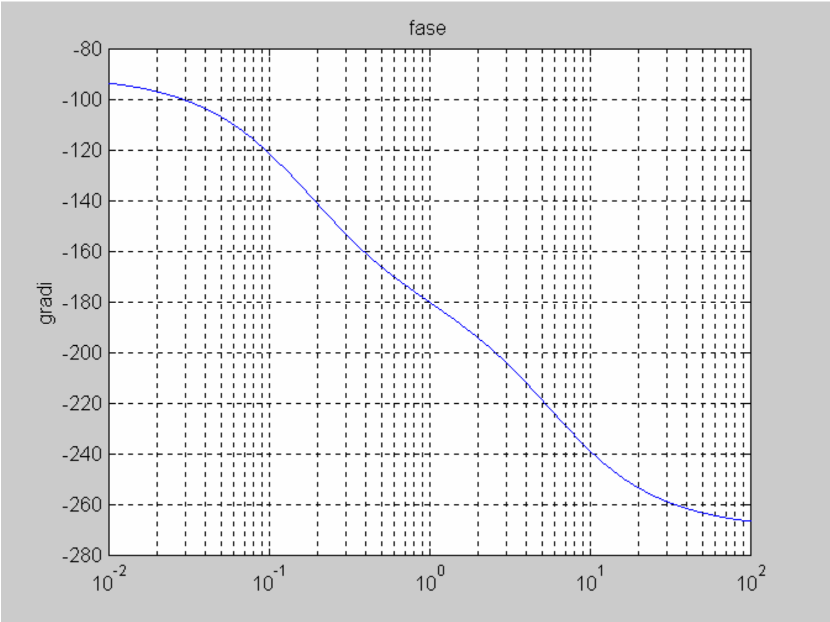
ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura.



La funzione $H(s)$ è data da $H(s)=\dfrac{1}{1+s}$, mentre i diagrammi di Bode associati alla funzione d'anello $L(s)=R(s)G(s)$ sono i seguenti:





3.1) Dall'esame dei diagrammi di Bode valutare approssimativamente la *pulsazione critica*, la *fase critica*, il *margine di fase* e il *margine di guadagno* associati al sistema.

3.2) Spiegare in particolare perché, nel valutare le prestazioni del sistema di controllo, è utile calcolare il margine di guadagno.

3.3) Quali ulteriori ipotesi occorre fare sulla funzione d'anello $L(s)$ per poter affermare che il sistema di controllo in esame sia asintoticamente stabile?

3.4) Ricavare l'andamento approssimato del diagramma del modulo associato alla funzione di trasferimento $F(s)$ tra il riferimento e l'uscita. In particolare, valutare il guadagno di tale funzione.

3.5) Valutare qual è l'effetto a regime sull'uscita di un disturbo $d(t) = sen(\frac{5}{2}t)$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{20}{s^2 + 4s + 5}$$

I poli hanno pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{5} \cong 2.2$ e smorzamento $\xi = 2/\sqrt{5} \cong 0.89$.

1.2) Risulta

$$t_a \cong \frac{5}{\xi\omega_n} = 2.5 \qquad , \qquad y(\infty) = \mu = 4$$

1.3) Occorre tener conto che la risposta presenta una (leggerissima) sovraelongazione che, in termini relativi, vale

$$\Delta = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cong 0.0022$$

Quindi, per ottenere il rispetto del vincolo per ogni *t* occorre che sia

$$(1+\Delta)\mu A \le 10$$

ovvero $A \le 2.4945$.

1.4) I poli dominanti sono quelli di $G(s)$, mentre il guadagno è il prodotto dei guadagni. Quindi risulta

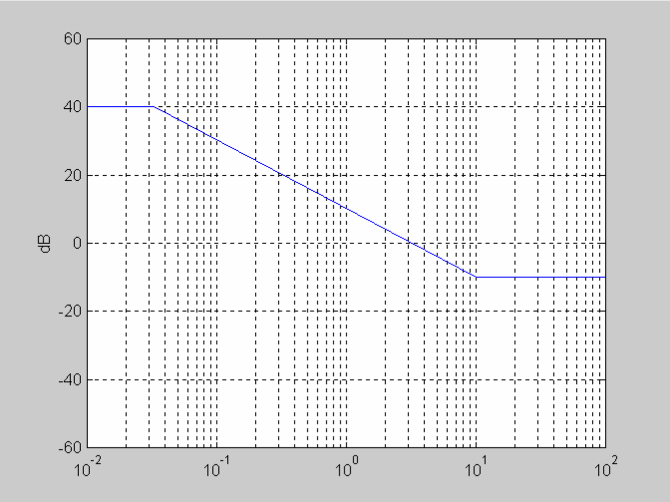
$$t_a \cong 2.5 \qquad , \qquad y(\infty) = 8$$

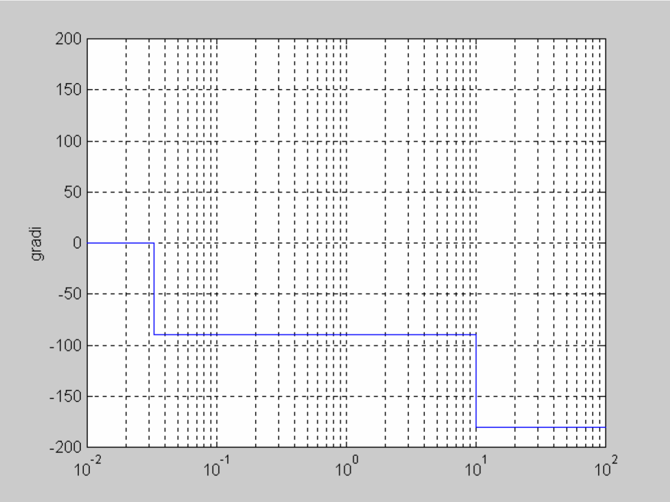
1.5) I poli dominanti sono ancora quelli di $G(s)$, mentre il guadagno è la somma dei guadagni. Quindi risulta

$$t_a \cong 2.5 \qquad , \qquad y(\infty) = 6$$

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) I diagrammi di Bode sono quelli mostrati in figura.





2.2) Si ottiene

$$|G(j1)| = \frac{100|1 - j0.1|}{|1 + j30|} \cong 3.35 \cong 10.5 \text{ dB}$$

$$\arg G(j1) = -\text{arctg}(0.1) - \text{arctg}(30) \cong -94°$$

Entrambi i valori sono in buon accordo con i diagrammi asintotici.

2.3) Il sistema si comporta da *filtro passa-basso* perché amplifica maggiormente le componenti del segnale di ingresso a bassa pulsazione rispetto a quelle ad alta pulsazione. La sua banda passante è approssimativamente $B = [0, 0.03]$.

2.4) Tra le innumerevoli soluzioni possibili una è data da $G(s) = \frac{100(1 + 0.1s)}{(1 + 30s)}$. Eventualmente si può anche introdurre un ritardo.

2.5) Tra le innumerevoli soluzioni possibili una è data da $G(s) = \frac{\mu(1 - 30s)}{(1 + 0.1s)}$, con μ positivo.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Dai diagrammi si ricava:

$$\omega_c \cong 0.3 \quad , \quad \varphi_c \cong -155° \quad , \quad \varphi_m \cong 25° \quad , \quad k_m \cong 20 \text{ dB} = 10$$

3.2) Il margine di guadagno è un indicatore di robustezza della stabilità rispetto a incertezze sul guadagno d'anello. Per ottenere un sistema di controllo robusto è opportuno che sia $k_m >> 1$.

3.3) Per poter applicare il criterio di Bode è necessario fare l'ipotesi che $L(s)$ non abbia poli con parte reale positiva (ovvero $P = 0$). A questo punto è possibile concludere che il sistema di controllo è asintoticamente stabile visto che sia il margine di fase sia il guadagno d'anello sono positivi. La positività del guadagno d'anello si deduce dal diagramma della fase.

3.4) In prima approssimazione il diagramma del modulo di $F(s)$ coincide con l'asse a 0 dB fino alla pulsazione critica $\omega_c \cong 0.3$, e poi segue il diagramma di $L(s)$.
Osservando dai diagrammi che la funzione d'anello ha tipo $g = 1$, si può concludere che il guadagno di $F(s)$ è $\mu_F = 1$.

3.5) La pulsazione del disturbo è maggiore della pulsazione critica. Si può quindi ritenere che tale disturbo non venga attenuato dalla retroazione. Pertanto l'unico effetto filtrante è quello fornito da $H(s)$. Poiché risulta $\left|H\left(j2.5\right)\right| = \dfrac{1}{\left|1+j2.5\right|} \cong 0.37$, l'uscita a regime è una sinusoide con pulsazione $\omega = 2.5$ e ampiezza circa uguale a 0.37 .