FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2007/08
Prova in itinere n.1
12 febbraio 2008

Traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Si consideri la risposta a uno scalino unitario del sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s+0.3)(s+0.8)}$$

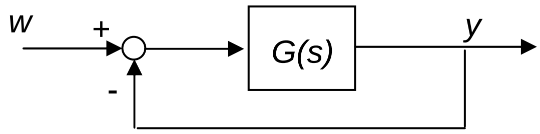
1.1) Determinare il valore del parametro α in modo che il valore dell'uscita a transitorio esaurito sia pari a 100.

1.2) Valutare il tempo di assestamento della risposta allo scalino.

1.3) Con il valore di α determinato, tracciare il grafico qualitativo della risposta allo scalino.

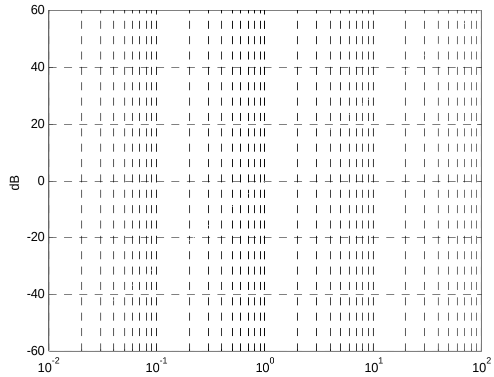
1.4) Basandosi sulla definizione di tempo di assestamento, mostrare perché nel caso in esame esso non dipende dal parametro α .

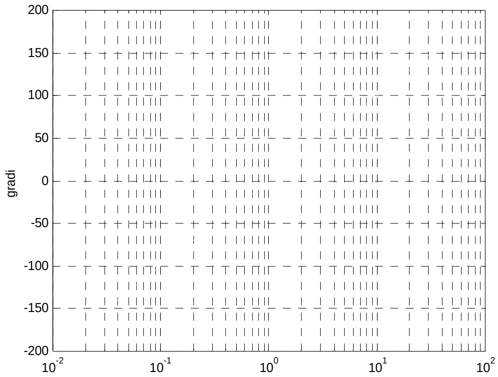
1.5) Si consideri ora il sistema mostrato in figura, dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento in esame e α assume il valore determinato al punto 1.1.
Dire, motivando la risposta, se il tempo di assestamento della risposta di y a uno scalino di w è inferiore o superiore a quello calcolato in precedenza.



ESERCIZIO 2

2.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase associati alla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{\alpha}{(s+0.3)(s+0.8)}$ dell’Esercizio precedente, con α =1.





2.2) Spiegare perché il sistema può essere considerato un filtro passa-basso. Valutare poi la sua banda passante.

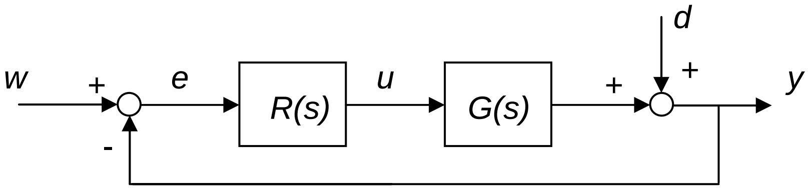
2.3) Supponendo che l’ingresso del sistema sia una sinusoide con pulsazione ω, determinare dai diagrammi di Bode il valore di ω per cui il segnale di ingresso subisce un’attenuazione di 1/10.

2.4) Verificare il risultato del punto precedente mediante il calcolo esplicito dell’attenuazione in corrispondenza del valore di ω trovato.

2.5) Dire come si modificherebbero i diagrammi di Bode se la funzione di trasferimento fosse $G(s) = \dfrac{e^{-0.01s}}{(s+0.3)(s+0.8)}$.

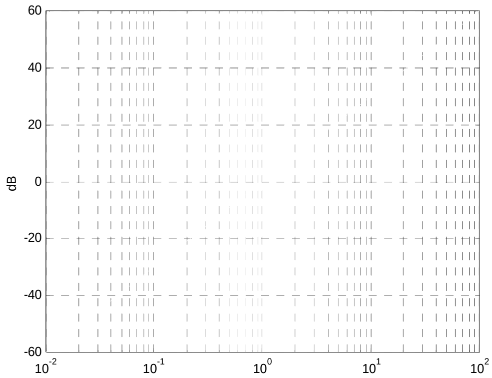
ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura.



con $R(s) = \dfrac{0.1}{s}$ e $G(s) = \dfrac{1}{(1+s)^3}$.

3.1) Dopo aver verificato le condizioni di applicabilità, mostrare mediante il criterio di Bode che il sistema di controllo è asintoticamente stabile.



3.2) Calcolare il valore a transitorio esaurito dell'errore *e* quando $w(t) = A\mathrm{sca}(t)$ e $d(t) = B\mathrm{sca}(t)$, con *A* e *B* costanti positive.

3.3) Ricavare l'andamento approssimato del diagramma del modulo associato alla funzione di trasferimento tra il disturbo *d* e l'uscita *y*.

3.4) Sulla base di tale diagramma, commentare la capacità del sistema di controllo di attenuare l'effetto di un generico disturbo *d*.

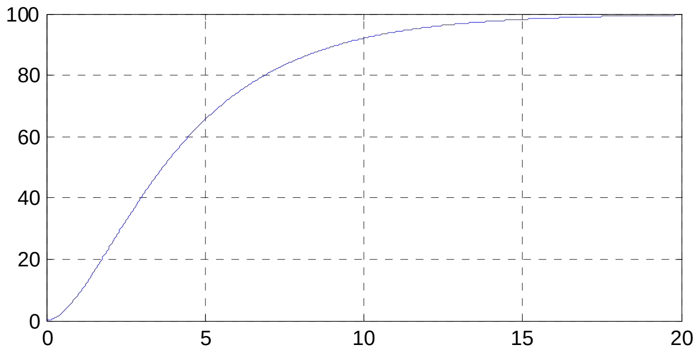
SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1.1) Occorre che il guadagno sia uguale a 100 e quindi deve essere $\alpha = 24$.

1.2) Le costanti di tempo associate ai due poli sono $\tau_1 = 1/0.3 \cong 3.3$ e $\tau_2 = 1/0.8 = 1.25$. Considerando solo il polo dominante, si può quindi valutare il tempo di assestamento come $t_a \cong 5\tau_1 \cong 16.7$.

1.3) La risposta allo scalino parte da 0 con tangente orizzontale e cresce in modo monotono, raggiungendo (in pratica) il valore asintotico 100 al tempo $t_a \cong 16.7$.

Nella figura è riportato il grafico esatto.



1.4) Il tempo di assestamento è il tempo necessario perché l'uscita entri e rimanga nell'intorno $[\mu(1-\varepsilon), \mu(1+\varepsilon)]$ del valore asintotico μ (di solito si sceglie $\varepsilon = 0.01$).
Cambiando il valore di α, cambia il guadagno μ e quindi la scala delle ordinate del grafico, ma l'intorno risulta scalato dello stesso fattore e la forma del grafico rimane identica. Perciò una variazione di α non modifica il tempo di assestamento.

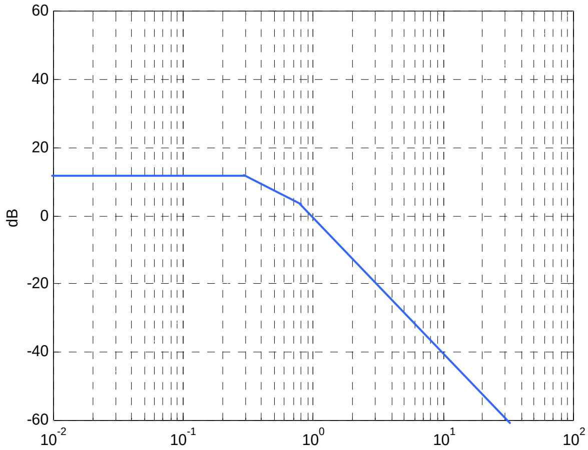
1.5) La funzione di trasferimento tra w e y è

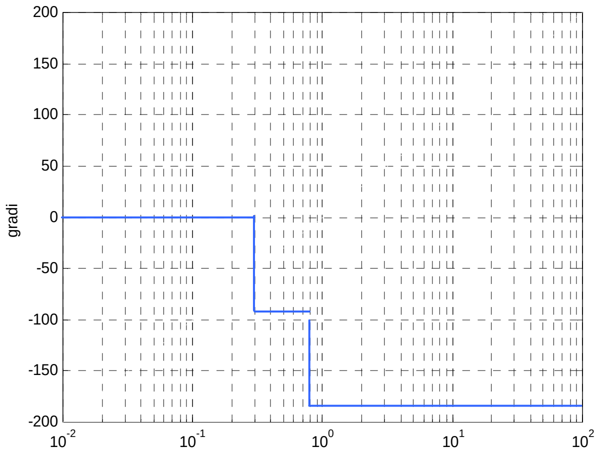
$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{24}{(s+0.3)(s+0.8)+24} = \frac{24}{s^2 + 1.1s + 24.24}$$

e i suoi poli sono complessi coniugati con $\omega_n = \sqrt{24.24} \cong 4.92$ e $\xi = 1.1/2\omega_n \cong 0.11$.
Il tempo di assestamento del sistema retroazionato è allora $t_{ar} \cong 5/\xi\omega_n \cong 9.24$, che è decisamente inferiore rispetto a quello del sistema in anello aperto.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

2.1) I diagrammi di Bode asintotici sono riportati nelle figure seguenti.





2.2) Dal diagramma del modulo si nota che il sistema amplifica maggiormente le componenti del segnale in ingresso alle basse frequenze, dove il diagramma è costante. Si può quindi affermare che si comporta da filtro passa-basso. La sua banda passante è approssimativamente descritta dall'intervallo di pulsazioni $[0,0.3]$.

2.3) Dal diagramma del modulo si osserva che l'attenuazione di $1/10 = -20$ dB si ottiene per $\omega \cong 3$.

2.4) Si ricava

$$|G(j3)| = \frac{1}{|(j3+0.3)||(j3+0.8)|} = \frac{1}{\sqrt{9.09}\sqrt{9.64}} \cong 0.107$$

che è in buon accordo con la valutazione precedente.

2.5) Il diagramma del modulo rimarrebbe invariato. Quello della fase verrebbe modificato dal contributo del ritardo, che è pari a $-0.01\omega 180/\pi$. Ciò contribuisce a far scendere la fase più rapidamente. Ad esempio in $\omega = 100$ la fase diminuirebbe di una quantità pari a $-180/\pi \cong -57°$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

3.1) La funzione d'anello è

$$L(s) = \frac{0.1}{s(1+s)^3}$$

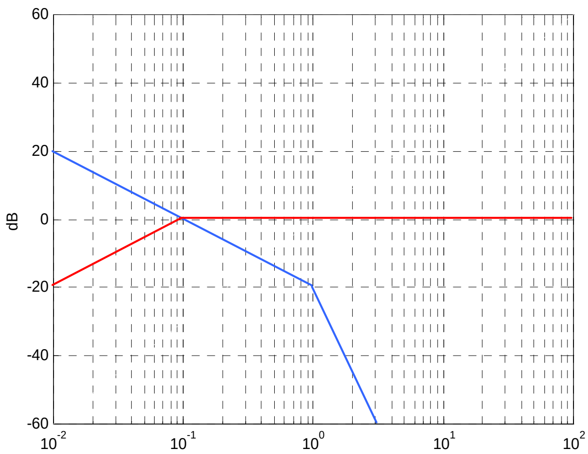
e non possiede poli con parte reale positiva. Pertanto la condizione $P = 0$ è verificata.

La seconda condizione di applicabilità chiede che il diagramma del modulo di L attraversi una sola volta (dall'alto verso il basso) l'asse a 0 dB. Anche ciò è verificato (si veda il diagramma di Bode sottostante).

A questo punto il sistema di controllo è asintoticamente stabile se e solo se il guadagno d'anello μ e il margine di fase φ_m sono positivi. Risulta $\mu = 0.1 > 0$. Inoltre, assumendo dal diagramma che sia $\omega_c \cong 0.1$, si ha

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c) = -90° - 3arctg(0.1) \cong -107°$$

per cui si ha $\varphi_m \cong 73° > 0$. Il sistema di controllo è quindi asintoticamente stabile.



3.2) Grazie alla presenza dell'integratore, entrambi i contributi sono nulli. Infatti si ha:

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s) \quad , \quad \frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{1}{1+L(s)} = -S(s)$$

$$e_w(\infty) = \lim_{s\to 0} sS(s)A/s = A\lim_{s\to 0} S(s) = A\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+0.1/s} = 0$$

$$e_d(\infty) = \lim_{s\to 0} s(-S(s))B/s = -B\lim_{s\to 0} S(s) = 0$$

Perciò l'errore a transitorio esaurito è nullo.

3.3) La funzione di trasferimento in esame è la funzione di sensitività $S(s)$. Il suo diagramma approssimato del modulo si ricava ribaltando quello di $L(s)$ fino alla pulsazione ω_c, e poi seguendo l'asse a 0 dB (vedi grafico in rosso nella figura sopra).

3.4) Dalla forma del diagramma si deduce che il sistema di controllo è capace di attenuare le componenti del disturbo fino alla pulsazione $\omega_c \cong 0.1$, lasciando passare inalterate le componenti a pulsazioni superiori.