FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Anno Accademico 2008/09
Prova in itinere n.2
10 febbraio 2009

Traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10^4 (s+4)(s+5)}{\left(s^2 + 10s + 5 \cdot 10^3\right)\left(s^2 + 3s + 3\right)}$$

1.1) Calcolare il guadagno statico e individuare la posizione nel piano complesso di poli e zeri.

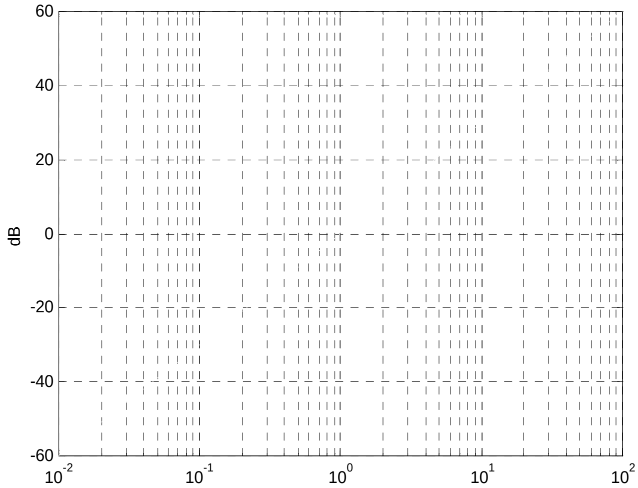
1.2) Valutare intorno a quale pulsazione il sistema presenta un rilevante fenomeno di risonanza. Si spieghi anche cosa questo significa.

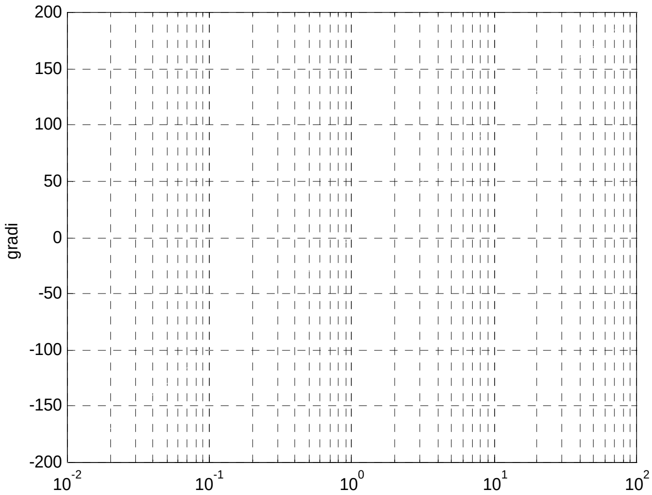
1.3) Ricavare un'approssimazione a poli dominanti del sistema.

1.4) Sulla base di tale approssimazione, valutare la durata del transitorio della risposta allo scalino.

ESERCIZIO 2

2.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase associati alla funzione di trasferimento $G(s) = \dfrac{0.5}{s(1+10s)}$

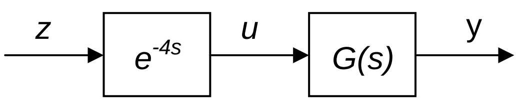




2.2) Calcolare analiticamente la risposta in frequenza associata a $G(s)$ in corrispondenza di $\omega = 1$ e verificare che il risultato è coerente con i diagrammi di Bode tracciati in precedenza.

2.3) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist associato alla funzione di trasferimento $G(s)$ e contare i giri antiorari che esso compie intorno al punto $-1/k$ al variare di k da $-\infty$ a $+\infty$.

2.4) Si consideri ora il sistema in figura, dove $G(s)$ è ancora la funzione di trasferimento del punto 2.1. Scrivere il legame nel dominio del tempo tra le variabili z, u e y. Dire poi come si modificherebbero i diagrammi di Bode rispetto a quelli tracciati al punto 2.1.



ESERCIZIO 3

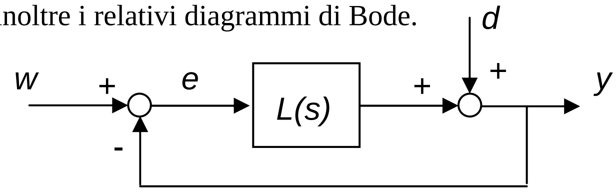
Con riferimento al sistema di controllo in anello chiuso mostrato in figura, si sappia che la funzione di trasferimento $L(s)$

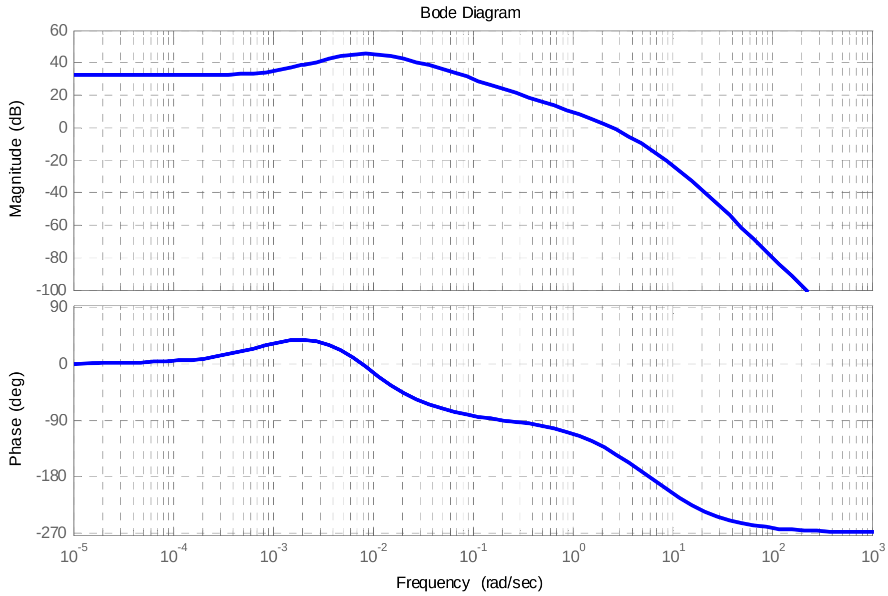
(1) non possiede poli con parte reale positiva;

(2) ha tipo 0;

(3) ha guadagno $\mu = 40$.

In figura sono riportati inoltre i relativi diagrammi di Bode.





3.1) Dire se e come, sulla base dei diagrammi, alcune delle caratteristiche (1)-(3) di $L(s)$ potevano essere dedotte immediatamente.

3.2) Dopo aver verificato le condizioni di applicabilità, utilizzare il criterio di Bode per giudicare l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso.

3.3) Supponendo che sia $w(t) = \text{sca}(t)$ e il disturbo d sia nullo, determinare il valore a transitorio esaurito dell'uscita y e valutare approssimativamente il tempo di assestamento.

3.4) Si assuma ora che il sistema sia affetto dal disturbo d. Giudicare quale tra i seguenti disturbi viene meglio attenuato dal sistema di controllo:

(a) $d(t) = \text{sen}(t/10)$ (b) $d(t) = \text{sen}(10t)$

3.5) Discutere brevemente come si modificherebbero le prestazioni del sistema di controllo se si moltiplicasse per 10 il guadagno della funzione $L(s)$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Il guadagno statico vale $\mu = G(0) = 40/3$. Gli zeri si trovano in –4 e –5. I poli sono complessi e sono in $-5 \pm j\sqrt{4975} \cong -5 \pm j70.5$ e $-3/2 \pm j\sqrt{3}/2 \cong -1.5 \pm j0.87$. Per la prima coppia di poli pulsazione naturale e smorzamento valgono $\omega_n = \sqrt{5000} \cong 70.7, \xi \cong 0.07$. Per la seconda coppia di poli valgono $\omega_n = \sqrt{3} \cong 1.7, \xi \cong 0.87$.

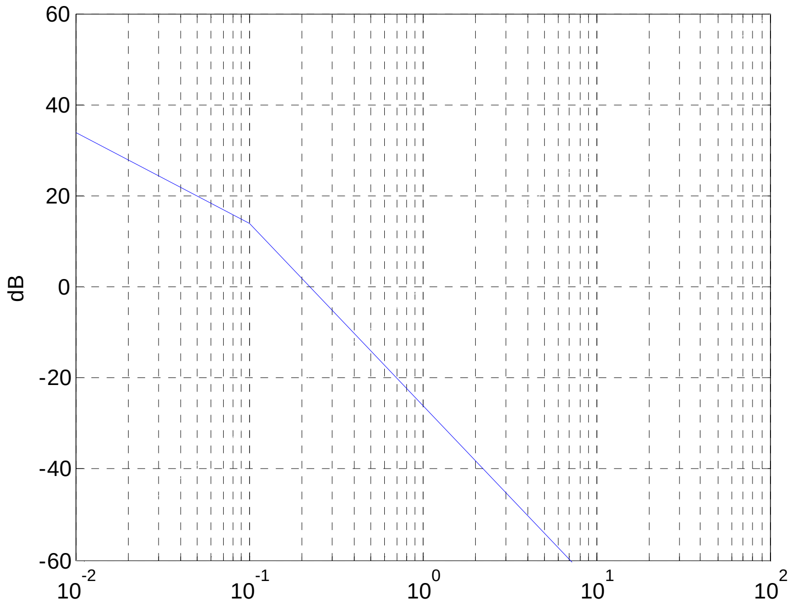
1.2) La pulsazione intorno alla quale si verifica il fenomeno della risonanza è la pulsazione naturale associata alla coppia di poli con basso smorzamento, ovvero $\omega \cong 70.7$. La risonanza corrisponde a un picco particolarmente pronunciato nel modulo della risposta in frequenza, ovvero a un'amplificazione relativamente elevata in un piccolo intervallo di pulsazioni.

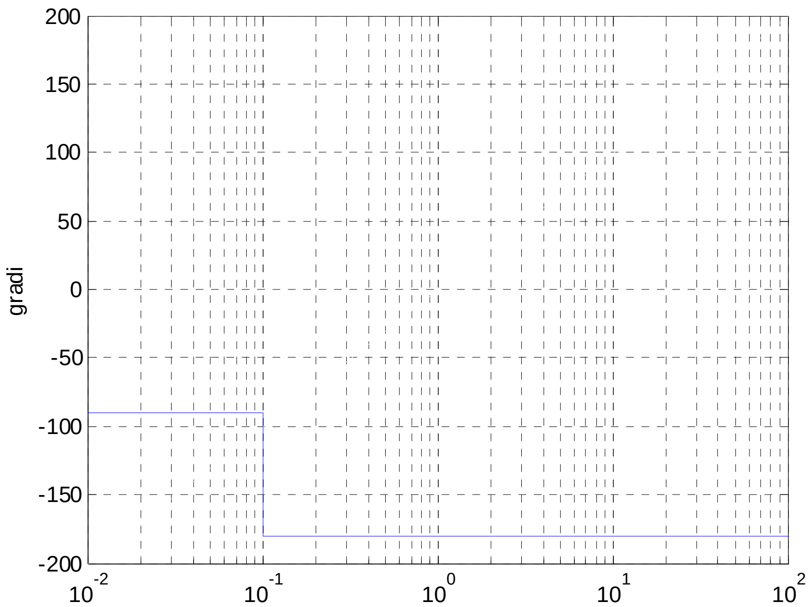
1.3) Un'approssimazione a poli dominanti è data da $G_a(s) = \dfrac{40}{s^2 + 3s + 3}$.

1.4) La durata del transitorio è circa $t_a = \dfrac{5}{\xi\omega_n} = \dfrac{5}{1.5} = 10/3$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) I diagrammi di Bode asintotici di modulo e fase sono tracciati qui sotto.





2.2) Risulta $G(j1) = \dfrac{0.5}{j(1+j10)}$. Quindi il modulo vale $\left|G(j1)\right| = \dfrac{0.5}{\sqrt{101}} \cong 0.05 \cong -26\text{dB}$.

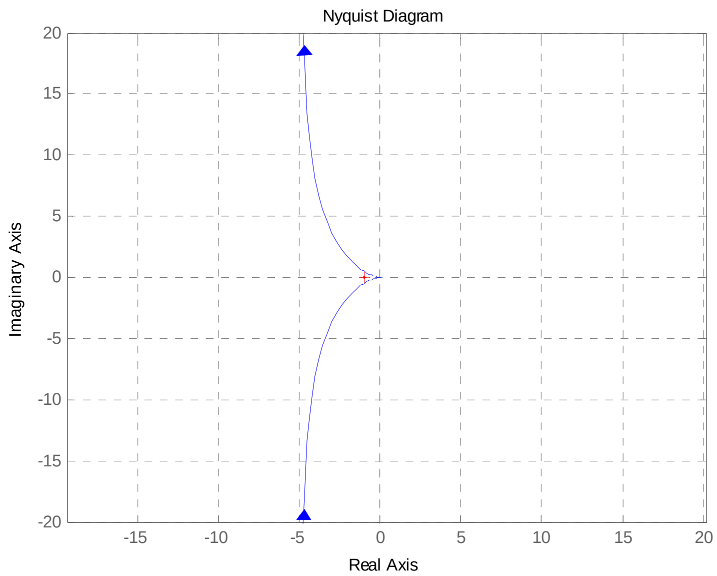
La fase è $\arg G(j1) = -90° - arctg(10) \cong -175°$. Entrambi i valori sono in buon accordo con i diagrammi.

2.3) Il diagramma di Nyquist ha l'andamento mostrato nella figura qua sotto. Naturalmente va immaginato completato da un arco di circonferenza di raggio infinito percorso in senso orario.

Se $k > 0$, il numero di giri antiorari intorno a $-1/k$ è $N = 0$.

Se $k < 0$, il numero di giri antiorari intorno a $-1/k$ è $N = -1$ (1 giro in senso orario).

Se $k = 0$, il punto $-1/k$ è all'infinito e non ha senso calcolare il numero di giri.



2.4) Lo schema a blocchi corrisponde a queste relazioni:

$$u(t) = z(t-4)$$

$$\ddot{y}(t) = -0.1\dot{y}(t) + 0.05u(t)$$

La presenza del ritardo non modifica il diagramma del modulo mentre la fase viene alterata di una quantità pari a $-4\omega\frac{180}{\pi}$, che asintoticamente tende a $-\infty$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Dai diagrammi si poteva dedurre quanto segue:

(1) si intuisce che non ci siano poli con parte reale positiva perché non esistono tratti in cui il modulo decresce mentre la fase aumenta;

(2) la pendenza iniziale nulla del diagramma del modulo indica che il tipo è $g = 0$;

(3) osservando che $|G(j0)| \cong 32\text{db} = 10^{32/20} \cong 40$ e che $\arg G(j0) = 0°$, si deduce che $\mu = 40$.

3.2) L'ipotesi (1) implica che sia $P = 0$. Inoltre il diagramma del modulo attraversa solo una volta l'asse a 0 dB. Pertanto le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono verificate.

La pulsazione critica vale $\omega_c \cong 2.5$, e in corrispondenza risulta $\varphi_c \cong -140°$. Perciò il margine di fase è $\varphi_m \cong 40° > 0°$. Poiché anche il guadagno d'anello μ è positivo, il criterio di Bode assicura che il sistema è asintoticamente stabile.

3.3) Essendo $g = 0$, il valore a transitorio esaurito di *y* è $y(\infty) = \dfrac{\mu}{1+\mu} = \dfrac{40}{41}$.

Per valutare il tempo di assestamento si possono utilizzare le approssimazioni $\omega_n \cong \omega_c$ e $\xi \cong \varphi_m / 100$ per i poli dominanti in anello chiuso. Pertanto si ottiene $t_a \cong 5/\xi\omega_n \cong 500/\varphi_m\omega_c \cong 5$.

3.4) Il disturbo *d* è in linea di andata. Va quindi considerata la funzione di sensitività $S(s)$, che risulta un passa-alto con banda passante che si estende da ω_c in avanti.

Quindi il disturbo (a), che ha pulsazione $\omega = 0.1$, viene attenuato (dal grafico di $1/|L(j\omega)|$ si deduce che l'attenuazione è di circa -30 dB), mentre il disturbo (b), che ha pulsazione $\omega = 10$, non viene attenuato.

3.5) Il diagramma del modulo si alzerebbe di 20 dB, portando a un aumento della pulsazione critica ω_c (risulterebbe $\omega_c \cong 8$). In corrispondenza di tale pulsazione il diagramma della fase (che rimarrebbe invariato) è al di sotto del valore $-180°$. Perciò, in base al criterio di Bode, il sistema in anello chiuso diventerebbe instabile.