ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-50(s-0.4)}{(s^2+5.2s+0.8)(s^2+13.5s+12.5)}$$

1.1) Determinare le costanti di tempo associate a poli e zeri.

1.2) Sulla base di un'approssimazione a poli dominanti, valutare il tempo di assestamento e il valore di regime della risposta a uno scalino unitario.

1.3) Dire, fornendo adeguata giustificazione, se nella risposta allo scalino sono presenti sovraelongazioni o sottoelongazioni.

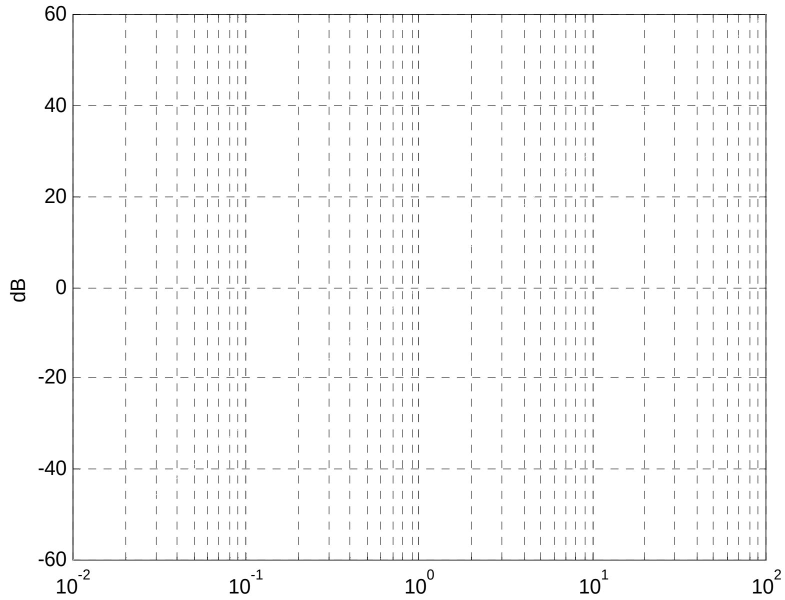
1.4) Spiegare perché il sistema può essere interpretato come un filtro passa-basso e valutarne poi, approssimativamente, la banda passante.

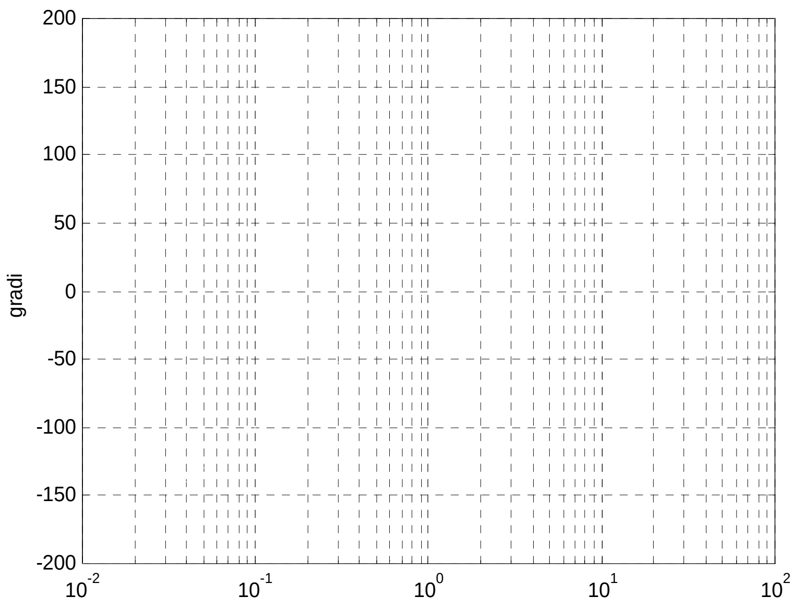
ESERCIZIO 2

Si consideri un regolatore in anello chiuso con funzione di trasferimento $R(s) = \dfrac{10(1+s)}{s}$.

2.1) Spiegare perché tale regolatore viene chiamato "regolatore PI".

2.2) Tracciare i dagrammi di Bode asintotici di modulo e fase associati a $R(s)$.





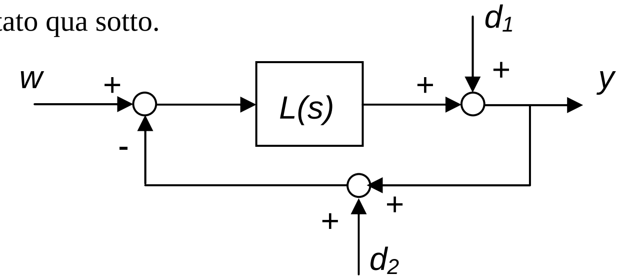
2.3) Calcolare in modo esatto i valori $|R(j1)|$ e $\arg R(j1)$ e verificarne la correttezza sui diagrammi di Bode prima tracciati.

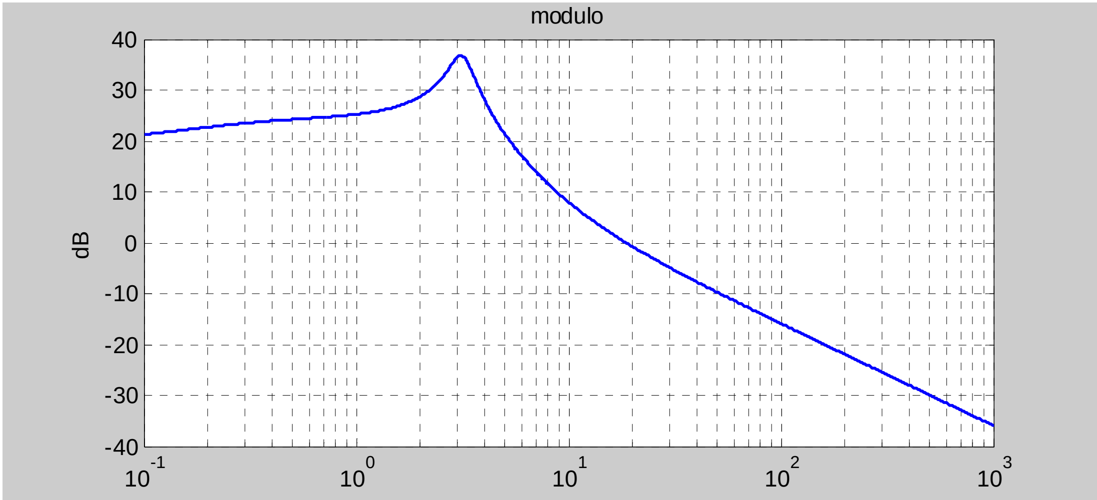
2.4) Facendo riferimento a un generico sistema di controllo in anello chiuso basato sul regolatore $R(s)$, discutere gli effetti del polo in $s = 0$ sulla stabilità del sistema di controllo e sulla sua precisione statica.

2.5) Dire se avrebbe senso utilizzare il regolatore $R(s)$ in un sistema di controllo in anello aperto.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo in anello chiuso mostrato in figura, dove $L(s)$ è una funzione di trasferimento razionale con guadagno positivo, priva di poli con parte reale positiva, e il cui diagramma di Bode del modulo è riportato qua sotto.





3.1) Determinare il valore della pulsazione critica ω_c .

3.2) Dire se, in base alle informazioni disponibili, si può affermare qualcosa sul segno e sul valore del margine di fase φ_m .

3.3) Supponendo che sia $\varphi_m = 60°$, valutare la posizione approssimata dei poli dominanti in anello chiuso.

3.4) Sempre con $\varphi_m = 60°$, dire se il sistema di controllo rimarrebbe asintoticamente stabile in presenza di un ritardo aggiuntivo pari a $\tau = 0.02$.

3.5) Valutare l'effetto di attenuazione sulla variabile controllata che il sistema di controllo è capace di applicare al disturbo $d_1(t) = \sin(4t)$.

3.6) Valutare l'effetto di attenuazione sulla variabile controllata che il sistema di controllo è capace di applicare al disturbo $d_2(t) = \sin(4t)$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) I 4 poli sono tutti reali e valgono $p_1 = -0.16$, $p_2 = -5.04$, $p_3 = -1$, $p_4 = -12.5$. Le rispettive costanti di tempo $\tau_i = -1/p_i$ valgono quindi $\tau_1 = 6.25$, $\tau_2 = 0.2$, $\tau_3 = 1$, $\tau_4 = 0.08$.

La costante di tempo associata all'unico zero è invece $T = -1/z = -2.5$. Essa è negativa perché lo zero si trova nel semipiano destro.

1.2) Il valore di regime della risposta allo scalino è $y(\infty) = G(0) = 2$. Il tempo di assestamento può essere valutato, considerando solo il polo dominante p_1, come $t_a \cong 5 \cdot 6.25 = 31.25$.

1.3) La presenza dello zero con parte reale positiva produce una sottoelongazione. Tale effetto non è però molto pronunciato perché la distanza dello zero dall'origine è maggiore rispetto a quella del polo dominante.

1.4) Tracciando il diagramma di Bode del modulo associato a $G(s)$ si nota che esso è orizzontale a basse pulsazioni e comincia a scendere in corrispondenza del polo dominante, cioè in $\omega \cong 0.16$. Da lì in avanti cambia via via pendenza ma rimane sempre decrescente. Si conclude quindi che il sistema ha un comportamento da filtro passa-basso, con banda passante circa uguale a $B = [0,\, 0.16]$.

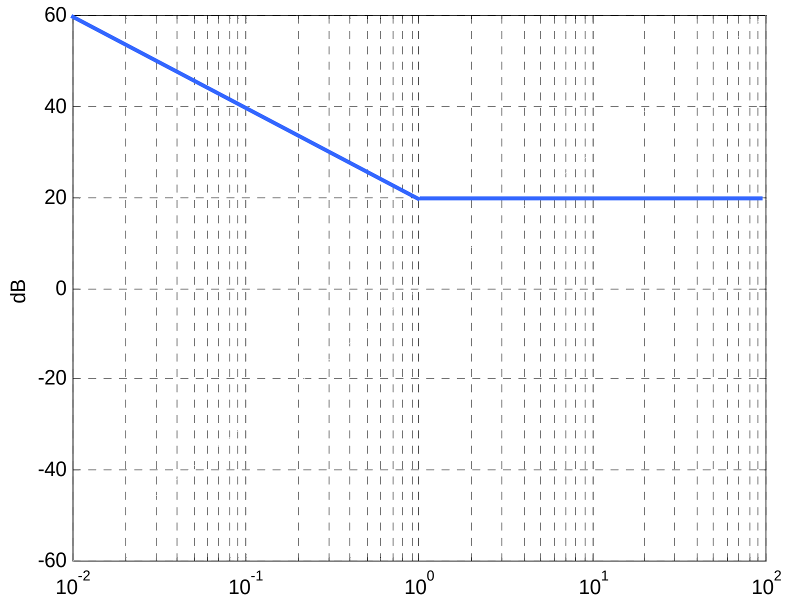
SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

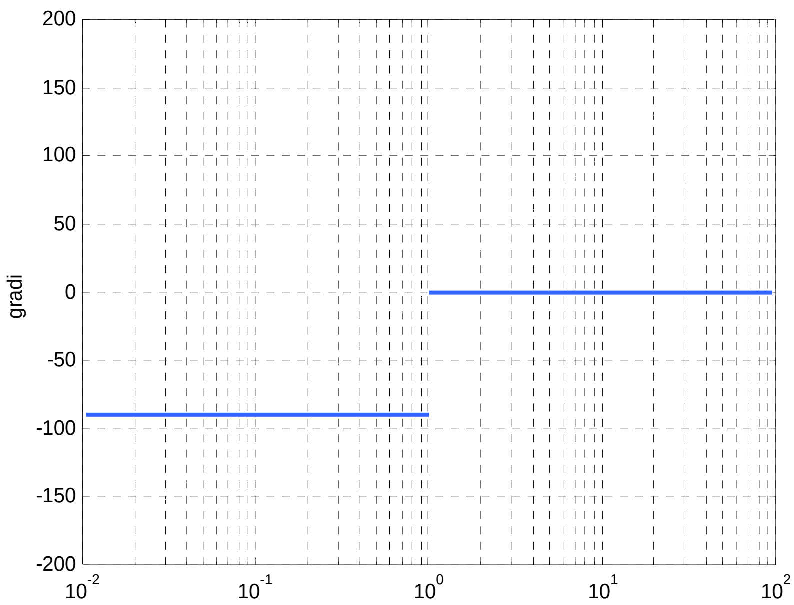
2.1) Il regolatore viene indicato come "PI" perché si tratta di un regolatore "Proporzionale-Integrale", cioè un regolatore che produce una variabile di controllo $u(t)$ che contiene due termini, uno proporzionale all'errore $e(t)$ istantaneo e l'altro proporzionale all'integrale dell'errore. In altri termini, la legge di controllo è data da

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Nel caso in esame risulta $R(s) = 10 + \frac{10}{s}$ e pertanto $K_p = 10$ e $K_i = 10$.

2.2) I diagrammi di Bode asintotici sono riportati in figura.





2.3) Risulta

$$|R(j1)| = \frac{10|1+j|}{|j|} = 10\sqrt{2} \cong 14.14$$

$$\arg R(j1) = \arg(1+j) - \arg(j) = \arctan(1) - 90° = 45° - 90° = -45°$$

Entrambi i valori sono in buon accordo con i diagrammi. Infatti $|14.14|_{dB} \cong 23\,dB$ e si noti che in corrispondenza di $\omega = 1$ il diagramma di Bode effettivo del modulo si trova 3 *dB* sopra quello asintotico. Inoltre, per quanto riguarda la fase, il diagramma effettivo sale più gradualmente rispetto all'approssimazione asintotica e, in corrispondenza di $\omega = 1$, vale proprio $-45°$.

2.4) La presenza nel regolatore di un polo nell'origine fa sì che, in generale, il tipo della funzione d'anello sia $g > 0$. E' ben noto che ciò favorisce le prestazioni statiche del sistema. Per esempio, in presenza di un riferimento a scalino o di un disturbo a scalino sul sistema da controllare, l'errore a transitorio esaurito risulta nullo.
D'altra parte, un polo nell'origine dà un contributo negativo alla fase della funzione d'anello, pari a $-90°$ a tutte le pulsazioni ω. Se il criterio di Bode è applicabile, tale contributo gioca in senso sfavorevole rispetto all'ottenimento di un elevato margine di fase e, in certi casi, può portare addirittura all'instabilità del sistema di controllo.

2.5) Non ha senso utilizzare un regolatore PI in uno schema di controllo in anello aperto, perché il polo in $s = 0$ renderebbe comunque il sistema complessivo non asintoticamente stabile.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Dal diagramma si legge che $\omega_c \cong 20$.

3.2) Non avendo a disposizione il diagramma della fase non è possibile trarre alcuna conclusione sul segno e sul valore del margine di fase. Si noti, per esempio, che la presenza di un fattore del tipo $\frac{1-s\tau}{1+s\tau}$, con $\tau > 0$, non ha nessuna influenza sul diagramma del modulo ma produce un sfasamento negativo che può raggiungere anche valori prossimi a $-180°$.

3.3) Essendo il margine di fase inferiore a 75°, si può dedurre che il sistema di controllo ha poli dominanti complessi, con $\omega_n \cong \omega_c \cong 20$ e $\xi = \varphi_m / 100 \cong 0.6$. La loro posizione nel piano complesso sarà quindi, approssimativamente $-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -12 \pm j16$.

3.4) Il ritardo aggiuntivo produrrebbe una diminuzione del margine di fase pari a $-\omega_c \tau \frac{180}{\pi} \cong -23°$. Il margine di fase rimarrebbe comunque positivo e, poiché il criterio di Bode è applicabile e il guadagno d'anello è positivo, il sistema di controllo rimarrebbe stabile (nel senso della stabilità BIBO).

3.5) La funzione di trasferimento tra d_1 e y è data dalla funzione di sensitività $S(s)$, che si comporta da filtro passa-alto, attenuando tutti i disturbi sinusoidali con pulsazione inferiore a $\omega_c \cong 20$. In particolare, il disturbo $d_1(t) = \sin(4t)$ viene attenuato di un fattore circa pari a $1/|L(j4)|$. Dal diagramma di Bode si legge $|L(j4)|_{dB} \cong 28\ dB$ e pertanto il fattore di attenuazione è circa $10^{-28/20} \cong 0.04$.

3.6) La funzione di trasferimento tra d_2 e y è data dalla funzione $-F(s)$, che si comporta da filtro passa-basso, lasciando passare sostanzialmente inalterati tutti i disturbi sinusoidali con pulsazione inferiore a $\omega_c \cong 20$. In particolare, il disturbo $d_2(t) = \sin(4t)$ non viene attenuato poiché $|F(j4)| \cong 1$.