ESERCIZIO 1

Si consideri una funzione di trasferimento del secondo ordine, con guadagno $\mu = 10$, senza zeri e con poli in $-\alpha \pm j\alpha$, $\alpha > 0$.

1.1) Scrivere l'espressione di tale funzione di trasferimento.

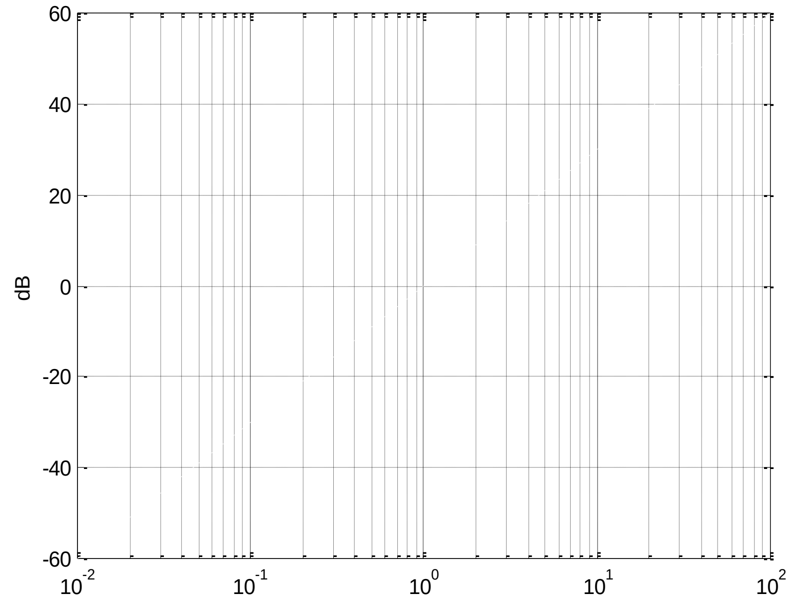
1.2) Determinare la pulsazione naturale ω_n e lo smorzamento ξ dei poli, spiegandone il significato geometrico nel piano complesso.

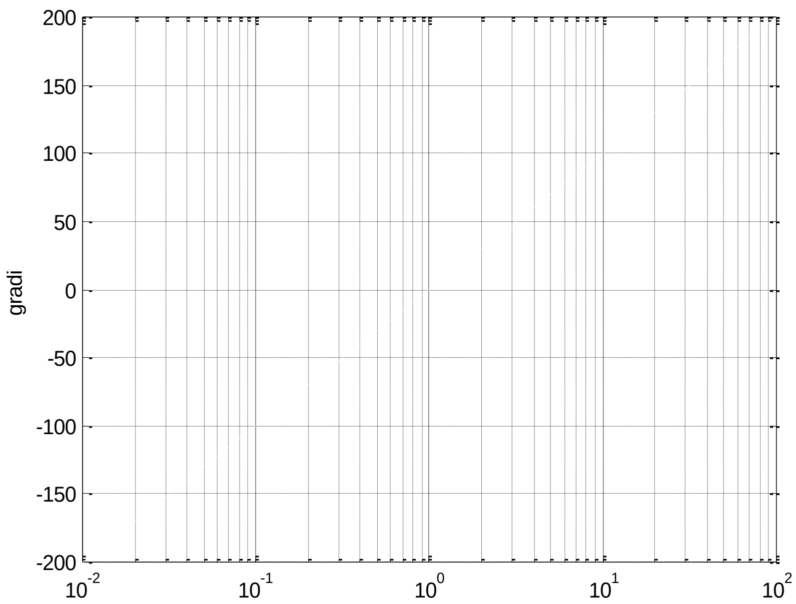
1.3) Si supponga di applicare al sistema un ingresso a scalino unitario. Valutare, in funzione del parametro positivo α, il tempo di assestamento t_a, l'ampiezza della massima sovraelongazione relativa Δ, e il periodo delle oscillazioni T.

1.4) Si supponga ora di applicare al sistema l'ingresso sinusoidale $u(t) = \mathrm{sen}(2t)$. Determinare il valore di α in modo che l'amplificazione dell'uscita (a regime) rispetto all'ingresso sia pari a 0 dB.

ESERCIZIO 2

2.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase di $G(s)=\dfrac{40(1+s)}{(1+15s)(1+0.2s)}$.



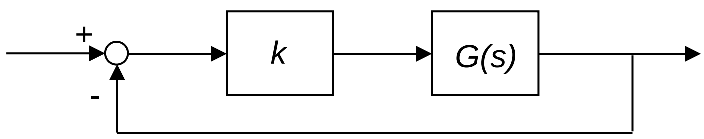


2.2) Dai diagrammi di Bode valutare l'amplificazione in corrispondenza di $\omega = 3$.

2.3) Con riferimento a un generico sistema, enunciare il teorema della risposta in frequenza. Spiegare perché un'ipotesi fondamentale del teorema è quella di asintotica stabilità; verificare poi che essa è soddisfatta nel caso in esame.

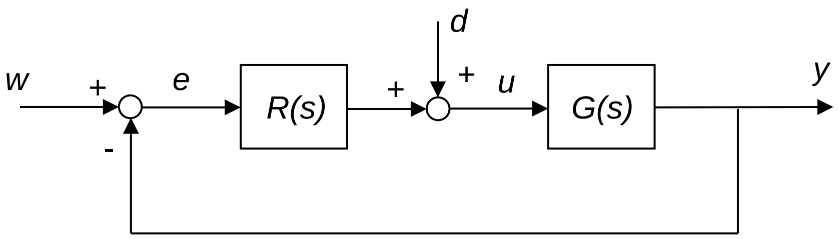
2.4) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare associato a $G(s)$.

2.5) Si consideri ora il sistema retroazionato in figura. Mediante il criterio di Nyquist, discutere la stabilità di tale sistema al variare del parametro reale k.

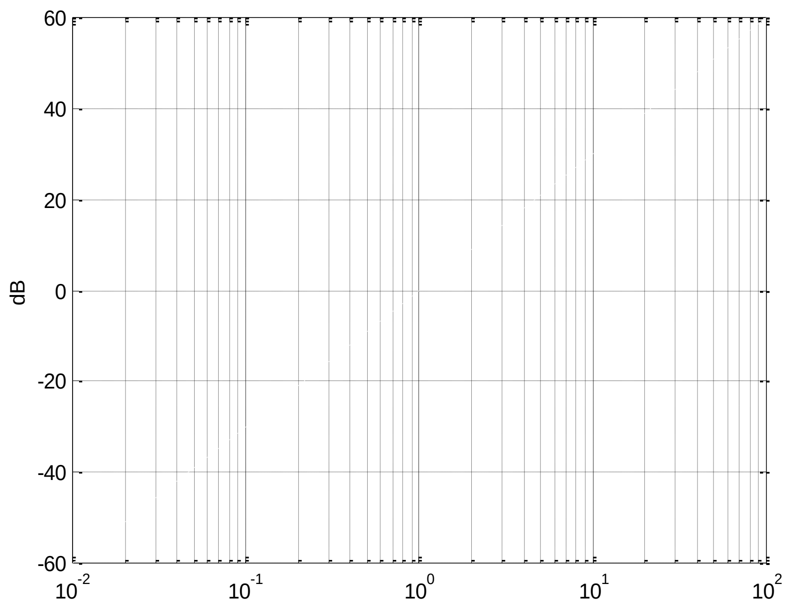


ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura, in cui $G(s) = \dfrac{1}{1+10s}$ e $R(s) = 100$.



3.1) Tracciare il diagramma di Bode del modulo della funzione d'anello $L(s)$.



3.2) Valutare la pulsazione critica e il margine di fase del sistema di controllo.

3.3) Calcolare il valore dell'errore a transitorio esaurito quando entrambi gli ingressi $w(t)$ e $d(t)$ sono scalini unitari.

3.4) Dopo aver verificato che il sistema di controllo è nominalmente stabile, valutare la robustezza della stabilità rispetto a un ritardo aggiuntivo incerto.

3.5) Supponendo ora che il disturbo $d(t)$ abbia uno spettro contenuto nella banda $[0.2, 1]$, valutare il suo effetto sulla variabile controllata $y(t)$ (si consiglia di utilizzare il diagramma di Bode).

SOLUZIONE DELL’ESERCIZIO 1

1.1) I poli hanno pusazione naturale $\omega_n = \alpha\sqrt{2}$ e smorzamento $\xi = 1/\sqrt{2}$. Tenendo anche conto degli altri dati la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{20\alpha^2}{s^2 + 2\alpha s + 2\alpha^2}$$

1.2) Come si è detto, risulta $\omega_n = \alpha\sqrt{2}$, $\xi = 1/\sqrt{2}$. La pulsazione naturale ω_n rappresenta la distanza dei poli dall’origine, mentre lo smorzamento ξ è il coseno dell’angolo formato dal segmento che congiunge il polo superiore con l’origine e il semiasse reale negativo.

1.3) Si ottiene:

tempo di assestamento: $t_a \cong 5/\xi\omega_n = 5/\alpha$

sovraelongazione relativa: $\Delta = \exp\left(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right) = \exp(-\pi) \cong 0.04$

periodo oscillazioni: $T = \dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \dfrac{2\pi}{\alpha}$

1.4) Per il teorema della risposta in frequenza, l’amplificazione a regime dell’uscita è pari a

$$|G(j2)| = \frac{20\alpha^2}{|(2\alpha^2 - 4) + j4\alpha|} = \frac{20\alpha^2}{\sqrt{4(\alpha^4 + 4)}} = \frac{10\alpha^2}{\sqrt{\alpha^4 + 4}}$$

Perché essa sia uguale a 1 (che corrisponde a 0 dB) basta che sia

$$\alpha^4 + 4 = 100\alpha^4$$

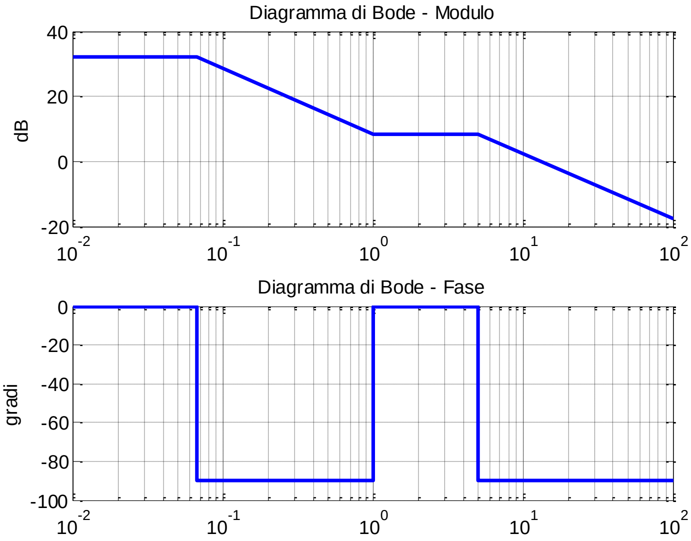
ovvero

$$\alpha = \sqrt[4]{4/99} \cong 0.45$$

considerando che α è una costante positiva.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

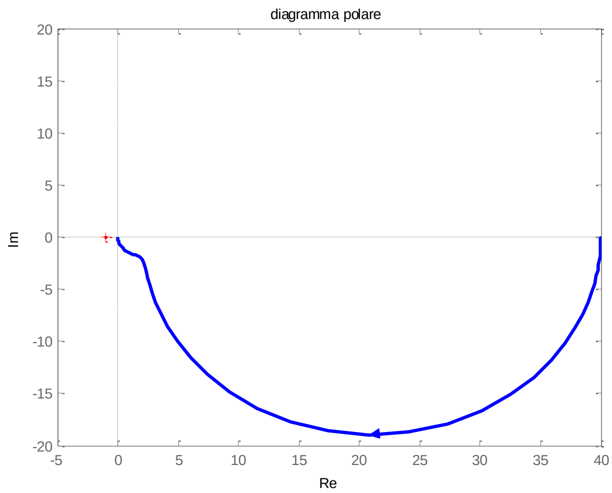
2.1) I diagrammi di Bode asintotici di modulo e fase sono i seguenti:



2.2) Dal diagramma del modulo, in corrispondenza di $\omega = 3$, si legge $|G(j3)|_{dB} \cong 8dB$, ovvero $|G(j3)| \cong 10^{8/20} \cong 2.5$.

2.3) Se si applica l'ingresso $u(t) = \sin(\omega t)$ a un sistema asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $G(s)$, l'uscita a transitorio esaurito vale $y(t) \cong |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$, qualunque sia lo stato iniziale. L'ipotesi di asintotica stabilità è necessaria per poter trascurare, a transitorio esaurito, i contributi dei modi del sistema e del movimento libero. Nel sistema in esame i poli sono entrambi negativi (valgono infatti $-1/15$ e -5) e quindi l'ipotesi di asintotica stabilità è verificata.

2.4) Basandosi sui diagrammi di Bode, si può ricavare il seguente andamento del diagramma polare:

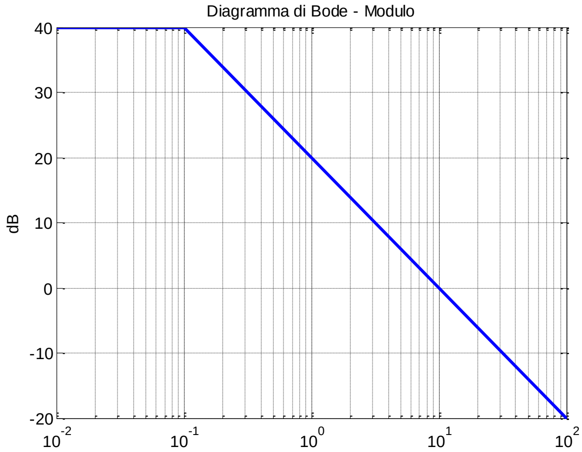


2.5) Si osservi dapprima che il diagramma di Nyquist Γ associato a $G(s)$ si ottiene dal precedente diagramma polare completato con il suo simmetrico rispetto all'asse reale. Denotando con N il numero di giri di Γ intorno al punto $-1/k$ e osservando che $P = 0$, si ricava:

$N = P = 0$	per $k > 0$ e per $-1/40 < k < 0$	$\rightarrow$	asintotica stabilità
N non ben definito	per $k = -1/40$	$\rightarrow$	non asintotica stabilità
$N = -1 \neq P = 0$	per $k < -1/40$	$\rightarrow$	instabilità

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) La funzione d'anello è $L(s) = R(s)G(s) = \dfrac{100}{1+10s}$. Il suo diagramma di Bode (asintotico) del modulo è qui riportato:



3.2) Dal diagramma si ricava la pulsazione critica $\omega_c \cong 10$. In corrispondenza si ha

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c) = -\arctan(10\omega_c) = -\arctan(100) \cong -89°$$

e pertanto il margine di fase vale $\varphi_m \cong 180° - 89° = 91°$.

3.3) Risulta $e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$, dove i due contributi dipendono rispettivamente da *w* e da *d*. Poiché $L(s)$ ha tipo nullo e guadagno $\mu = 100$, risulta

$$e_w(\infty) = \frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{101} \quad , \quad e_d(\infty) = \frac{-1}{1+\mu} = \frac{-1}{101}$$

Pertanto, a transitorio esaurito, $e(\infty) = 0$.

3.4) Sono verificate le condizioni di applicabilità del criterio di Bode. Risulta poi $\mu = 100 > 0$ e $\varphi_m \cong 91° > 0$. Quindi il sistema di controllo è (nominalmente) asintoticamente stabile e rimane stabile per qualunque ritardo $\tau < \tau_m$, con

$$\tau_m = \frac{\varphi_m}{\omega_c}\frac{\pi}{180°} \cong 9.1\frac{\pi}{180°} \cong 0.16$$

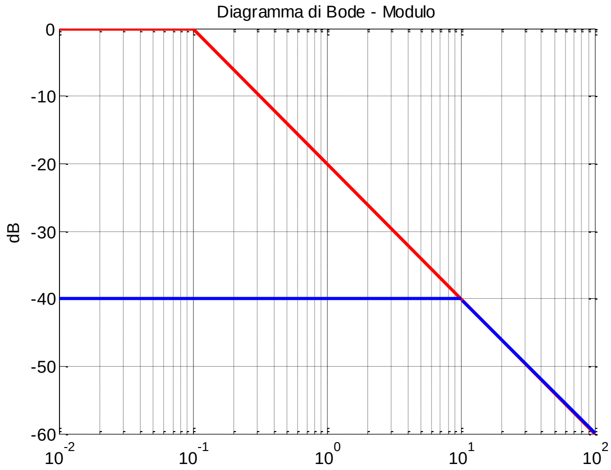
3.5) Occorre considerare la funzione di trasferimento

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+R(s)G(s)}$$

tra il disturbo *d* e la variabile controllata *y*, e valutarne la risposta in frequenza nella banda $B = [0.2, 1]$. Per far ciò conviene riferirsi alla seguente approssimazione:

$$|M(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1+R(j\omega)G(j\omega)|} \cong \begin{cases} \dfrac{1}{|R(j\omega)|} & , \omega < \omega_c \\ |G(j\omega)| & , \omega \geq \omega_c \end{cases}$$

che genera il diagramma di Bode approssimato mostrato nella seguente figura (la curva in rosso rappresenta il diagramma di $|G(j\omega)|$ e la curva in blu quello di $|M(j\omega)|$).



Come si nota, l'intervallo $B=[0.2,1]$ corrisponde a una zona in cui il diagramma di $|M(j\omega)|$ è circa orizzontale e assume il valore -40 dB. L'effetto del disturbo viene quindi amplificato di tale valore, corrispondente a un fattore di attenuazione di 0.01.