ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.1) Calcolare il movimento libero dell'uscita a partire da un generico stato iniziale $x(0)$.

1.2) Calcolare la funzione di trasferimento tra u e y e, sulla base di essa, analizzare la stabilità del sistema.

1.3) Disegnare uno schema a blocchi del sistema in cui siano evidenziate le 3 variabili di stato $x_i(t),\ i = 1,2,3$.

ESERCIZIO 2

Si consideri lo schema a blocchi della Figura 1 e si risponda alle seguenti domande.

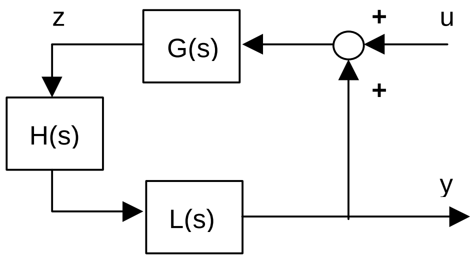


Fig. 1

2.1) Calcolare la funzione di trasferimento tra *u* e *y*.

2.2) Calcolare la funzione di trasferimento tra *u* e *z*.

2.3) Sapendo che $G(s)$ ha tipo $g_G = 0$ e guadagno m_G, $H(s)$ ha tipo $g_H = -2$, e $L(s)$ ha tipo $g_L = 0$ e guadagno m_L, determinare il guadagno statico tra *u* e *y*. Spiegare poi cosa esso rappresenta.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto del primo ordine descritto dalle equazioni:

$$x_{k+1} = u_k x_k^3$$
$$y_k = x_k$$

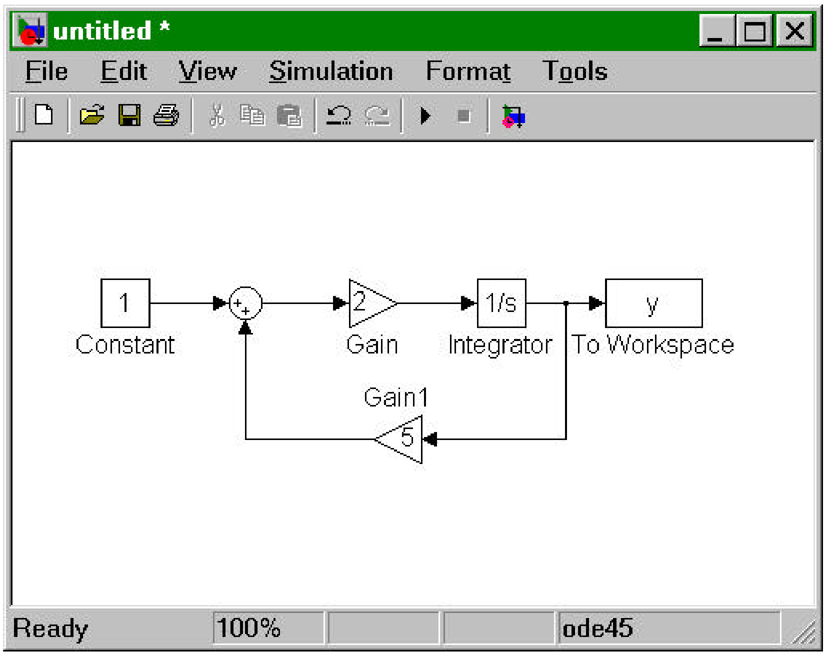
3.1) Determinare gli stati di equilibrio associati al valore $\bar{u} = 1$ dell'ingresso.

3.2) Valutare la stabilità degli stati di equilibrio trovati al punto precedente.

3.3) Calcolare i primi valori (per $0 < k < 3$) della risposta y_k del sistema a uno scalino unitario, a partire dallo stato iniziale $x_0 = 2$.

ESERCIZIO 4

Si scriva l'equazione differenziale corrispondente al sistema dinamico rappresentato dal seguente schema Simulink:



SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Il movimento libero dell'uscita è dato da

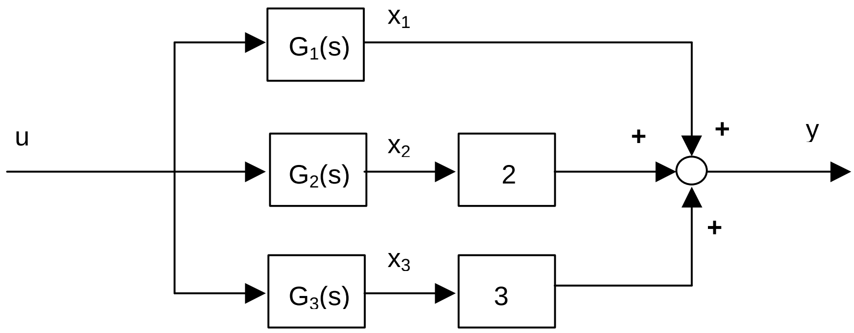
$$y_l(t) = Ce^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = e^{-4t}x_1(0) + 2e^{-6t}x_2(0) + 3e^{-4t}x_3(0)$$

1.2) La funzione di trasferimento vale

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s+4} + \frac{2}{s+6} + \frac{3}{s+4} = \frac{6s+32}{(s+4)(s+6)}$$

Poiché i poli hanno sono reali e negativi e l'unica cancellazione ha riguardato un autovalore negativo, il sistema è asintoticamente stabile.

1.3) Un possibile schema a blocchi è il seguente:



dove $G_1(s) = \dfrac{1}{s+4}$, $G_2(s) = \dfrac{1}{s+6}$, $G_3(s) = \dfrac{1}{s+4}$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) La funzione di trasferimento tra *u* e *y* vale

$$F_1(s) = \frac{G(s)H(s)L(s)}{1-G(s)H(s)L(s)}$$

2.2) La funzione di trasferimento tra *u* e *y* vale

$$F_2(s) = \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)L(s)}$$

2.3) Poiché $H(0) = 0$, risulta

$$m = F_1(0) = 0$$

Tale valore rappresenta il rapporto tra uscita e ingresso in condizioni di equilibrio. Quindi l'uscita all'equilibrio vale 0 indipendentemente dal valore costante dell'ingresso *u*.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Gli stati di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione algebrica

$$x = x^3$$

Quindi ci sono 3 stati di equilibrio: $\bar{x}_A = 0$, $\bar{x}_B = 1$, $\bar{x}_C = -1$.

3.2) Occorre calcolare la matrice dinamica (in questo caso una scalare) del sistema linearizzato. Si ottiene

$$f_x(x,u) = 3ux^2$$

Valutando tale espressione in corrispondenza dei 3 stati di equilibrio risulta, rispettivamente,

$$f_x(\bar{x}_A, \bar{u}) = 0$$
$$f_x(\bar{x}_B, \bar{u}) = 3$$
$$f_x(\bar{x}_C, \bar{u}) = 3$$

Quindi, solo il primo stato di equilibrio è asintoticamente stabile (autovalore minore di 1 in modulo), mentre gli altri due sono instabili (autovalore maggiore di 1 in modulo).

3.3) Utilizzando ricorsivamente le equazioni del sistema si ottiene

$$y_0 = x_0 = 2$$
$$y_1 = x_1 = x_0^3 = 8$$
$$y_2 = x_2 = x_1^3 = 8^3 = 512$$

e così via.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 4

Lo schema a blocchi rappresenta l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y}(t) = 2(1 + 5y(t))$$