ESERCIZIO 1

Un sistema lineare invariante con ingresso *u* e uscita *y* è descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{120}{(1+2s)(1+8s+100s^2)}$$

1.1) Dopo aver verificato l'asintotica stabilità del sistema, calcolare il valore a transitorio esaurito della risposta del sistema all'ingresso $u(t) = 0.1\mathrm{sca}(t)$.

1.2) Determinare un'approssimazione a poli dominanti del sistema e, sulla base di essa, valutare il tempo di assestamento della risposta allo scalino.

1.3) Spiegare cosa si intende per *fenomeno di risonanza*, e dire se esso può verificarsi per il sistema in esame.

ESERCIZIO 2

Nella Figura 1 sono riportati i diagrammi di Bode di un sistema con ingresso *u* e uscita *y*.

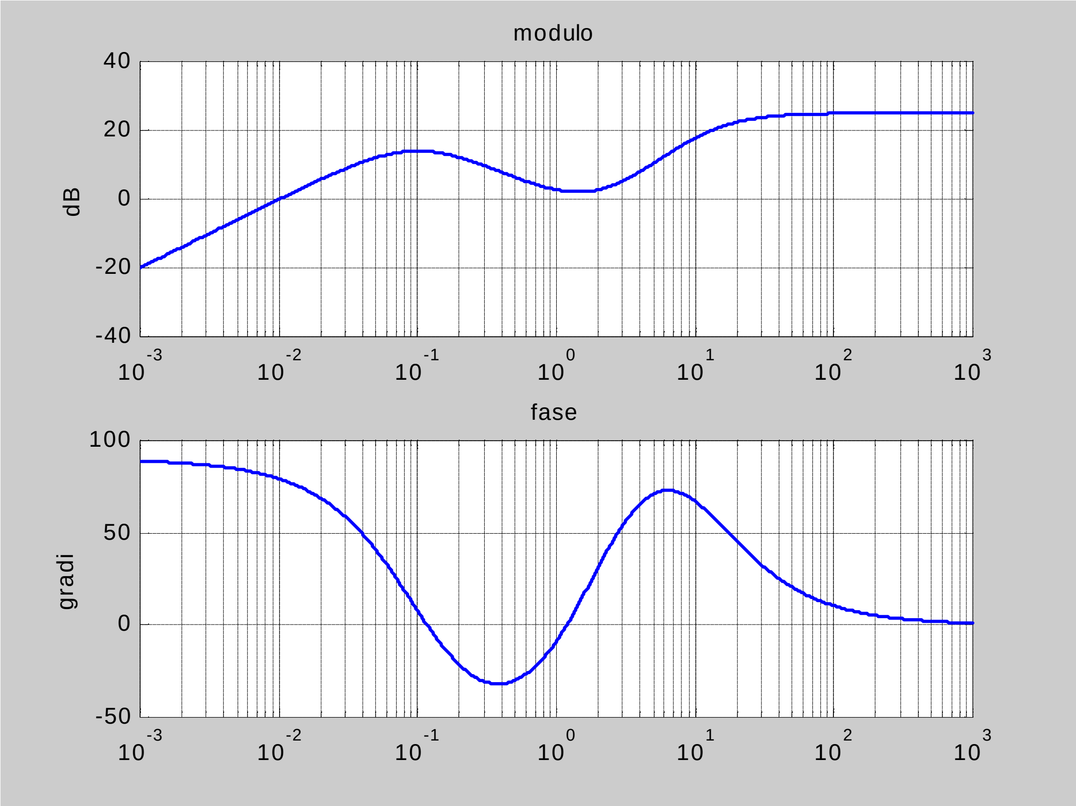

Fig. 1

2.1) Precisare sotto quali ipotesi si può applicare al sistema il cosiddetto *teorema della risposta in frequenza*.

2.2) Supponendo che le ipotesi del punto 2.1 siano verificate, valutare l'andamento a transitorio esaurito dell'uscita quando l'ingresso vale $u(t) = \text{sen}(3t)$.

2.3) Dire se il sistema ha un comportamento da filtro *passa-basso* o da *passa-alto*. Valutarne poi la banda passante.

2.4) Sulla base dei diagrammi di Bode, dire se è possibile valutare il punto di partenza (per $w = 0$) e il punto di arrivo (per $w = \infty$) nel piano complesso del corrispondente diagramma polare.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema retroazionato di Figura 2.

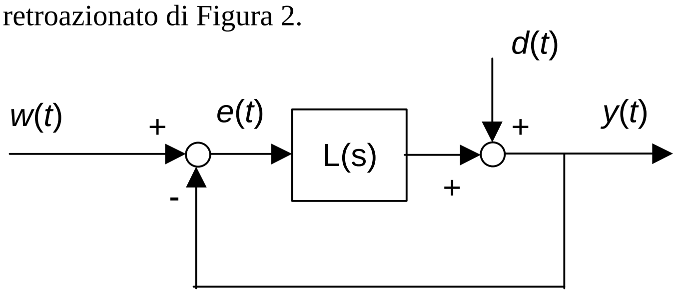

Fig. 2

con $L(s) = \frac{k}{s}$.

3.1) Applicando il criterio di Nyquist, giudicare la stabilità del sistema per valori positivi di *k*.

3.2) Sempre attraverso il criterio di Nyquist, giudicare la stabilità del sistema per valori negativi di *k*.

3.3) Supponendo che *k* sia positivo, calcolare la funzione di trasferimento tra *w* e *y* e discutere come cambia, al variare di *k*, la velocità di risposta del sistema.

3.4) Sempre con *k* positivo, calcolare l'espressione di $|e(\infty)|$ quando $w(t) = \text{sca}(t)$ e $d(t) = 5\text{sca}(t)$.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 1

1.1) Un polo del sistema vale –0.5. Gli altri due sono le radici di un polinomio di secondo grado a coefficienti positivi, e pertanto hanno parte reale negativa. Quindi il sistema è asintoticamente stabile.
Il valore a transitorio esaurito dell'uscita vale

$$y(\infty) = 0.1 \cdot G(0) = 12$$

1.2) Poichè i due poli complessi coniugati sono più vicini all'asse immaginario rispetto al polo reale, l'approssimazione a poli dominanti è

$$G_a(s) = \frac{120}{1 + 8s + 100s^2}$$

La pulsazione naturale e lo smorzamento dei poli complessi valgono, rispettivamente, $w_n = 0.1$, $x = 0.4$. Pertanto, il tempo di assestamento è $t_a \cong 5/xw_n = 125$.

1.3) Il fenomeno della risonanza si verifica quando un sistema sollecitato da un ingresso sinusoidale produce un'amplificazione molto elevata per particolari valori della pulsazione dell'ingresso in un intervallo molto ristretto. Poiché il sistema in esame possiede poli complessi coniugati con uno smorzamento relativamente basso, il fenomeno della risonanza è presente. Esso si manifesta per valori della pulsazione dell'ingresso vicini a quello della pulsazione naturale dei poli complessi.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 2

2.1) L'ipotesi fondamentale per poter applicare il teorema della risposta in frequenza (nella forma vista a lezione) è che il sistema sia asintoticamente stabile.

2.2) Dai diagrammi si ricava, approssimativamente,

$$|G(j3)| \cong 6dB \cong 2$$

$$\arg G(j3) \cong 50° \cong 0.9\ rad$$

Perciò l'uscita a transitorio esaurito assume l'andamento

$$y(t) \cong 2\mathrm{sen}(3t + 0.9)$$

2.3) Il sistema si comporta da filtro passa-alto, poiché amplifica maggiormente le sinusoidi ad alta frequenza.
Dal diagramma del modulo si può valutare che la sua banda passante è circa $B \cong [20, \infty)$.

2.4) Assumendo che i diagrammi di Bode abbiano un andamento "regolare" al di fuori dell'intervallo di pulsazioni visualizzato in Figura 1, il punto di partenza del diagramma polare è l'origine del piano complesso e il punto d'arrivo è circa il punto 20 sull'asse reale.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO 3

3.1) Il diagramma di Nyquist associato a $1/s$ è costituito dall'asse immaginario e da una semicirconferenza all'infinito percorsa in senso orario. Il numero di giri che esso compie intorno al punto $-1/k$, per ogni *k* positivo è nullo. Osservando che è anche $P = 0$ (nessun polo di $L(s)$ giace nel semipiano destro), la condizione del criterio di Nyquist è soddisfatta e il sistema è asintoticamente stabile per ogni *k* positivo.

3.2) Se *k* è negativo, il diagramma di Nyquist associato a $1/s$ compie un giro orario intorno al punto $-1/k$. Quindi, la condizione del criterio di Nyquist è violata e il sistema è instabile per ogni *k* negativo.

3.3) La funzione di trasferimento richiesta vale

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{k}{s+k}$$

Al crescere di *k*, il polo si sposta sempre più a sinistra nel piano complesso e quindi il sistema diventa sempre più veloce.

3.4) Applicando il teorema del valore finale, si trova

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+k/s}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{1+k/s}\cdot\frac{5}{s}\right) = 0$$